



Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



ZPRACOVÁNÍ BIOLOGICKÝCH SIGNÁLŮ

Učební text

**Jitka Mohylová
Vladimír Krajča**

Ostrava 2007

Recenze: Ing. Jan Havlík

Název: Zpracování biologických signálů
Autor: Jitka Mohylová, Vladimír Krajča
Vydání: první, 2006
Počet stran: 135
Vydavatel a tisk: Ediční středisko VŠB – TUO

Studijní materiály pro studijní obor: Řídicí a informační systémy fakulty FEI

Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Rozvoj lidských zdrojů

Název: E-learningové prvky pro podporu výuky odborných a technických předmětů

Číslo: CZ.O4.01.3/3.2.15.2/0326

Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava

Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Jitka Mohylová, Vladimír Krajča

© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-1491-9

Obsah

1.	ZÁKLADNÍ POJMY	9
1.1.	Definice signálu.....	9
1.2.	Charakteristiky některých biomedicínských signálů.....	10
2.	PŘEDZPRACOVÁNÍ DAT	18
2.1.	Analogově digitální převodník.....	18
3.	FILTRACE	26
4.	CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH SIGNÁLŮ	42
5.	SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA BIOLOGICKÉHO SIGNÁLU.....	51
5.1.	Neparametrické metody – Fast Fourier Transform	52
5.2.	Parametrické metody	60
5.3.	Modely odhadu spektra	64
5.4.	Spektrální analýza	69
5.5.	Korelační analýza	74
6.	ZOBRAZENÍ VÝSLEDKŮ SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY	80
6.1.	Metoda zhuštěných spektrálních kulis – CSA.....	80
6.2.	Topografické mapování – brainmapping – BM	82
7.	METODY UMĚLÉ INTELIGENCE	94
7.1.	Základní pojmy teorie učení.....	95
7.2.	Shluková analýza – Cluster Analysis	102
7.3.	Klasifikace metod shlukové analýzy	102
7.4.	Učící se klasifikátory.....	110
8.	UMĚLÉ NEURONOVÉ SÍTĚ (NN)	117
8.1.	Topologie NN a způsoby šíření signálu	122
8.2.	Perceptron a jeho učení	123
8.3.	Vícevrstvý perceptron – multilayer perceptron (MLP)	125
8.4.	Další algoritmy učení	128
8.5.	Samoseorganizující neuronové sítě	129



Průvodce studiem – pokyny ke studiu předmětu:

Zpracování biologických signálů

Pro předmět Zpracování biologických signálů 9. (10.) semestru oborů Měřicí a řídicí technika, Řídicí a informační systémy jste obdrželi studijní balík obsahující

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu
- CD-ROM s doplňkovými animacemi vybraných částí kapitol
- harmonogram průběhu semestru a rozvrh prezenční části

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu se předpokládá absolvování předmětu Signály a soustavy

Cílem předmětu

je seznámení se základními pojmy z oboru zpracování biomedicínských dat. Po prostudování modulu by měl student být schopen provést analýzu signálů v časové a frekvenční oblasti.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do magisterského studia oborů Měřicí a řídicí technika, Řídicí a informační systémy studijního programu M2612 Elektrotechnika a informatika, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:



Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.



Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat ...
- definovat ...
- vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.



Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.



Pojmy k zapamatování

Hlavní pojmy, které si v kapitole máte kapitoly osvojit. Pokud některému z nich po prostudování nebudete ještě nerozumět, vraťte se k nim ještě jednou.



Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.



Úlohy k řešení

Protože většina teoretických pojmů tohoto předmětu má bezprostřední význam a využití v databázové praxi, jsou Vám nakonec předkládány i praktické úlohy k řešení. V nich je hlavní význam předmětu a schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací hlavním cílem předmětu.



Klíč k řešení

Výsledky zadaných příkladů i teoretických otázek výše jsou uvedeny v závěru učebnice v Klíči k řešení. Používejte je až po vlastním vyřešení úloh, jen tak si samokontrolou ověříte, že jste obsah kapitoly skutečně úplně zvládli.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeje autoři výukového materiálu

Jitka.mohylova@vsb.cz

Harmonogram průběhu studia

455-318/1: Zpracování biosignálů (ZBS)

Garant: Ing. Jitka Mohylová, Ph.D.

Anotace:

Vlastnosti biologických signálů, kódování lékařských dat, diskretizace. Zpracování signálů v časové oblasti, filtrace, ve frekvenční oblasti - parametrické modely, FFT. Zobrazení zpracovaných výsledků - CSA, topografické mapování. Adaptivní segmentace, metody automatické klasifikace signálů - učení bez učitele, shluková analýza. Neuronové sítě. Praktické aplikace zpracování EEG signálů.

Typ studia: magisterské

Počet kreditů: 4

Bodové hodnocení:

	Položka	Poč. bodů	Min. bodů
1.	Semestrální práce č. 1	10	
2.	Semestrální práce č. 2	10	
3.	Semestrální práce č. 3	10	
4.	Semestrální práce č. 4	10	
5.	Zkouška - ZBS	60	

Průběžná kontrola studia:

čtyři semestrální práce (korespondenční úkoly) v požadovaných termínech

Podmínky udělení zápočtu:

Pro udělení zápočtu musí student odevzdat do konce 14. týdne semestru všechny čtyři zadané semestrální práce. Každá semestrální práce je hodnocena maximálně 10 body. Student tedy může získat až $4 \cdot 10 = 40$ bodů. Kurs je ukončen závěrečnou kombinovanou zkouškou. Student může získat u písemné části zkoušky 30 bodů, u ústní zkoušky 30 bodů. Aby byla závěrečná zkouška úspěšně složena, musí student získat nejméně 10 bodů. Pro úspěšné ukončení kursu musí student získat nejméně 51 bodů.

Cíle předmětu:

Cílem předmětu Zpracování biosignálu je seznámit studenty s jednotlivými biologickými signály, jejich filtrací a analýzou v časové a kmitočtové oblasti a metodami zobrazení zpracovaných výsledků. Student bude znát charakteristiky jednotlivých biosignálů, dovede určit spektrum, spektrální výkonovou hustotu, korelační a koherenční analýzu. Bude schopen provést adaptivní segmentaci, automatickou klasifikaci a shlukovou analýzu. Dosažené výsledky zobrazí metodou CSA a brain mappingem. Při analýze reálných dat (EEG a EKG) bude využívat prostředí MATLAB.

Získané dovednosti:

Student bude znát charakteristiky jednotlivých biosignálů, dovede určit spektrum, spektrální výkonovou hustotu, korelační a koherenční analýzu. Bude schopen provést adaptivní segmentaci, automatickou klasifikaci a shlukovou analýzu. Dosažené výsledky zobrazí metodou CSA a brain mappingem. Při analýze reálných dat (EEG a EKG) bude využívat prostředí MATLAB.

Přednášky:

- Signály v lékařství - původ, charakter a obecné principy zpracování biosignálů, metody a algoritmy zpracování signálů přehledně Charakteristika biosignálů, EEG, EMG, ECG, EOG. Původ, zdroje, diagnostické využití. Možnosti uplatnění bio-inženýrů.
- Zpracování biologických signálů v reálném čase a off line. Přiřazení nutných zařízení, počítačové sítě. Statistické charakteristiky biosignálů. Pravděpodobnostní rozložení. Stochastické procesy, analýza časových řad. Nestacionarita.
- Údaje o pacientovi, identifikační soubory. Sběr a předzpracování biologických dat, diskretizace - základní řetězec převodu do počítače. A/D převodníky, problémy vzorkování a kvantizace signálu. Aliasing. Filtrace. Trendy. Data zpracovávána souběžně se signály.
- Spektrální analýza I. - Základní metody. Periodogram, AR model. Parametrické a neparametrické metody. Praktické problémy odhadu spektra. Křížové spektrum, koherence a fáze.
- Spektrální analýza II. - FFT. Aplikace. Metoda zhuštěných spektrálních kulis (CSA). Použití. Interhemisferická a lokální koherence. Mediální synchronie a symetrie. Měření fáze.
- Topografické mapování elektrofyziologické aktivity. Princip brain mappingu. Amplitudové a frekvenční mapování. Interpolace. Použití v klinické diagnostice. Dynamické mapování.
- Adaptivní segmentace Motivace. Nestacionarita biosignálů. Základní metody. Multikanálová on-line adaptivní segmentace. Extrakce příznaků.
- Metody automatické klasifikace I. - Učení bez učitele. Metriky. Normalizace dat. Shluková analýza. K-means algoritmus. Fuzzy množiny. Optimální počet tříd. Limity a omezení shlukové analýzy.
- Neuronové sítě a zpracování signálů. Metoda hlavních komponent a neuronové sítě. Hebbovské učení. Multikanálové signály - komprese a rekonstrukce. Samoorganizující se metoda hlavních komponent (Doc. Ing. Vladimír Krajča, Csc).
- Automatická klasifikace II. - Učící se klasifikátory. Srovnání vlastností supervizovaného a nesupervizovaného učení. On-line klasifikace. k-NN klasifikátor klasický a fuzzy. Porovnání s neuronovými sítěmi.
- Automatická detekce epileptických grafoelementů II. Automatický detektor hrotů na základě mediánové filtrace. Aritmetický detektor. Kombinovaný detektor. Metoda hlavních komponent a klasické filtrace pro detekci.
- Elektrokardiografický signál, digitální zpracování, vlastnosti. Kritéria digitalizace EKG, frekvenční analýza, filtrace, adaptivní filtrace. Redukce dat, holterovské techniky patientské identifikace.
- Spirometrie, popis parametrů signálu, základní algoritmy a výstupní data. Požadavky na digitální zpracování a grafickou prezentaci.
- Obrazové signály. Průměty a sekvence vícedimenzionálních signálů. Konkrétní programové prostředky zpracování obrazů. Prezentace v diskrétní formě.

Počítačové laboratoře:

- Úvod do zpracování biosignálů. Praktické ukázky EEG, EMG, ECG aktivity, epileptické paroxysmy, spánkové grafoelementy. Artefakty.

- Statistické charakteristiky biosignálů. Praktická realizace algoritmů číslicového zpracovávání biosignálů. Programové vybavení. Uživatelský interface. Formáty dat. **Semestrální práce I.** Načtení a zobrazení reálného biosignálu Termín: 1 týden
- Sběr a předzpracování biologických dat. Snímání dat v klasických a bezpapírových přístrojích. A/D převodníky Nyquistův teorém. Chyby při převodu. Úprava signálu.
- Spektrální analýza I. Základní metody. Spektrální analýza a syntéza signálů pomocí FFT. Filtrace, odstraňování šumu. LDR algoritmus. Nevýhody periodogramu. Windowing. **Semestrální práce II.** Spektrální analýza a syntéza signálu pomocí FFT Termín: 2 týdny
- Topografické mapování elektrofyziologické aktivity. Demonstrace topografického mapování na umělých a klinických datech. Iterativní vytváření mapy. Animace. Úskalí mapování.
- Spektrální analýza II. Aplikace. Aplikace CSA pro patologickou i spánkovou aktivitu. Koherenční analýza pro diagnostiku CMP. **Semestrální práce III.** a) Topopografické mapování sítě 20 bodů (brain mapping), b) CSA 2 minut záznamu Termín: 2 týdny
- Adaptivní segmentace. Nastavení parametrů. Přednosti a omezení metod. Ukázky funkce segmentačních algoritmů.
- Metody automatické klasifikace I. Učení bez učitele. Základní algoritmy shlukové analýzy na simulovaných datech. Ukázky klasifikace EEG dat. Použití fuzzy množin pro zvýšení homogenity tříd.
- Analýza dlouhodobých signálů. Ukázka funkcí systému pro analýzu 24 hod monitorování. Sumární informace. Extrakce prototypů.
- Extrakce komprimované informace z dlouhodobých záznamů. Aplikace na reálných datech, další metody, analýza spánkového grafu. Ukázka programu WaveFinder.
- Automatická klasifikace II. Učící se klasifikátory. Předvedení základních algoritmů učících se klasifikátorů na simulovaných a datech. Použití fuzzy množin v k-NN klasifikátorech **Semestrální práce IV.** 3-NN učící se klasifikátor pro simulovaná data. Termín: 2 týdny
- Automatická detekce epileptických hrotů I. Demonstrace komerčních programů: automatická detekce epileptických grafoelementů (Gotman). Ukázka programu pro analýzu dipólů (Scherg, FOCUS).
- Předzpracování EKG signálu pomocí wavelet transformace: komprese, filtrace, odstranění artefaktů. Výpočet frekvenčních amplitudových a fázových spekter, výkonové spektrum signálu EKG. Určení korelační funkce a korelačního koeficientu u patologických a fyziologických záznamů.
- Některé detekční algoritmy QRS komplexu - výpočet a porovnání, použití metody detekce R-R intervalů v závislosti na patologických stavech a případných variabilitách srdečního rytmu. Praktická demonstrace plně automatického hodnotícího systému signálu EKG na Krajské hygienické stanici v Ostravě.
- (Exkurse v počítačové EEG laboratoři Neurologického oddělení FN Bulovka. Konzultace výsledků semestrálních prací.)

1. ZÁKLADNÍ POJMY

1.1. Definice signálu



Čas ke studiu: 1 hodina



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat signál
- popsat jednotlivé druhy signálu
- vyřešit převod analogového signálu na číslicový a naopak



Pojmy k zapamatování 1

Signál, biosignál, druhy signálů, biologický artefakt, technický artefakt.



Výklad

Co je to signál?

- prostředek přenosu informace (Cohen)
- jakákoliv fyzikální kvantita měnící se v čase, prostoru, nebo s nějakou další veličinou (Proakis, Manolakis)
- matematicky je popsán jako funkce jedné nebo více proměnných

$$s(t) = 10 \cdot \sin \omega t$$

Co je to biologický signál?

- je to signál – platí pro něj metodika zpracování signálu, která je pokryta řadou učebnic
- je to speciální signál, který je – a) vyvolán existencí živého organismu
b) snímán ze živého organismu

Co je to zpracování signálu?

- extrakce požadované informace, jež může být skryta v signálu
- většina reálných signálů je analogových
- počítač (základní jednotka zpracování signálů) – zpracovává číslicový signál

Klasifikace signálů:

Deterministický signál – lze popsat explicitními matematickými vztahy

Náhodné signály – vzorek (realizace) náhodného (stochastického) procesu se liší jeden od druhého, mají ale stejné statistické vlastnosti

– popsány pouze pravděpodobností výskytu (funkce hustoty pravděpodobnosti) a statistickými momenty

Periodické signály – $x(t) = x(t + kT)$, T je perioda snadno jsou popsány ve frekvenční oblasti (fundamentální frekvence + harmonické)

Kvaziperiodické – nejsou periodické, ale mají diskrétní popis ve frekvenční oblasti (různé frekvence nejsou harmonické)

Stacionární proces – statistické vlastnosti nejsou funkcí času lze určit odhad střední hodnoty zprůměrněním realizací $x(t)$ v čase t

Ergodické procesy – statistické zprůměrnování přes realizace se rovná průměru v čase pro určitý časový úsek (např. u signálu EEG - máme jen jednu časovou realizaci, nemůžeme měřit víckrát)

Multikanálový signál – generován z několika zdrojů (EEG – síť elektrod)

Původ bioelektrických signálů

jsou vyvolány buď samotnými životními projevy organismu, nebo působením na organismus z vnějšku

- nervová buňka (EEG)
- svalová buňka (EMG, EKG), spolupracující ve větších skupinách

Rozdělení biosignálů

rozdělení je odvozeno od měřených veličin, nikoli od postupů měření

- bioelektrické
- biomagnetické
- bioimpedanční
- bioakustické
- biomechanické
- biochemické

1.2. Charakteristiky některých biomedicínských signálů

Elektrické signály:

✚ **EKG, VKG – Elektrokardiogram, vektorkardiogram** – záznam spojený s mechanickou a elektrickou aktivitou srdce.

- povrchové elektrody
- amplitudová úroveň dosahuje 50 μV - 5 mV
- frekvenční rozsah je 0,01 - 150 Hz.

✚ **Fetální EKG, VKG**

- povrchové elektrody
- amplitudová úroveň dosahuje 10 – 300 μV

- frekvenční rozsah je 0,01 - 150 Hz.

✚ **EMG – Elektromyogram** – záznam el. potenciálu svalu

- povrchové elektrody
- jehlové elektrody (MUAP – motor unit action potential)

SFEMG – single fiber elektromyografie – ze svalového vlákna – neurosvalové poruchy (myastenia gravis)

MUAP – signály z komplexu – nervová buňka → nervové vlákno → neurosvalové spojení → svalové vlákno. Diagnostika myopatií, lézí

- amplitudová úroveň dosahuje 0,1 - 5 mV
- frekvenční rozsah je 0 - 10000 Hz.

✚ **PNG – Pneumogram – dýchání**

✚ **EOG - Elektrookulogram** – záznam el. potenciálu sítnice. Užívá se pro měření pohybu očí, při výzkumu spánku.

- měří se párem povrchových elektrod umístěných kolem očí.
- amplitudová úroveň dosahuje 10 μ V - 5 mV.
- frekvenční rozsah je 0,05- 100 Hz

✚ **EGG – Elektrogastrogram**

- povrchové elektrody
- amplitudová úroveň dosahuje 10 – 1000 μ V
- frekvenční rozsah je 0,01 – 1 Hz.

Tyto signály slouží jako doplněk pro nahrávání EEG při takzvané polygrafii

✚ **EEG – Elektroencefalogram** - záznam elektrické aktivity mozku. Hlavní nástroj pro diagnózu epilepsie, zranění hlavy, poruchy spánku, psychické poruchy, neurologické poruchy...

- povrchové nebo vpichové elektrody
- amplitudová úroveň dosahuje 2 – 300 μ V
- frekvenční rozsah je 0,1 – 80 Hz.

Magnetické signály:

✚ **MKG – Magnetokardiogram**

- amplituda magnetické indukce dosahuje 50 – 70 pT
- frekvenční rozsah je 0,05 – 100 Hz.

✚ **Fetální magnetokardiogram**

- amplituda magnetické indukce dosahuje 1 pT
- frekvenční rozsah je 0,05 – 100 Hz.

✚ **Magnetomyogram**

- amplituda magnetické indukce 10 – 90 pT

- frekvenční rozsah je 0 – 20 kHz.

✚ **Magnetoencefalogram** – alfa rytmus, 2 cm nad skalpem

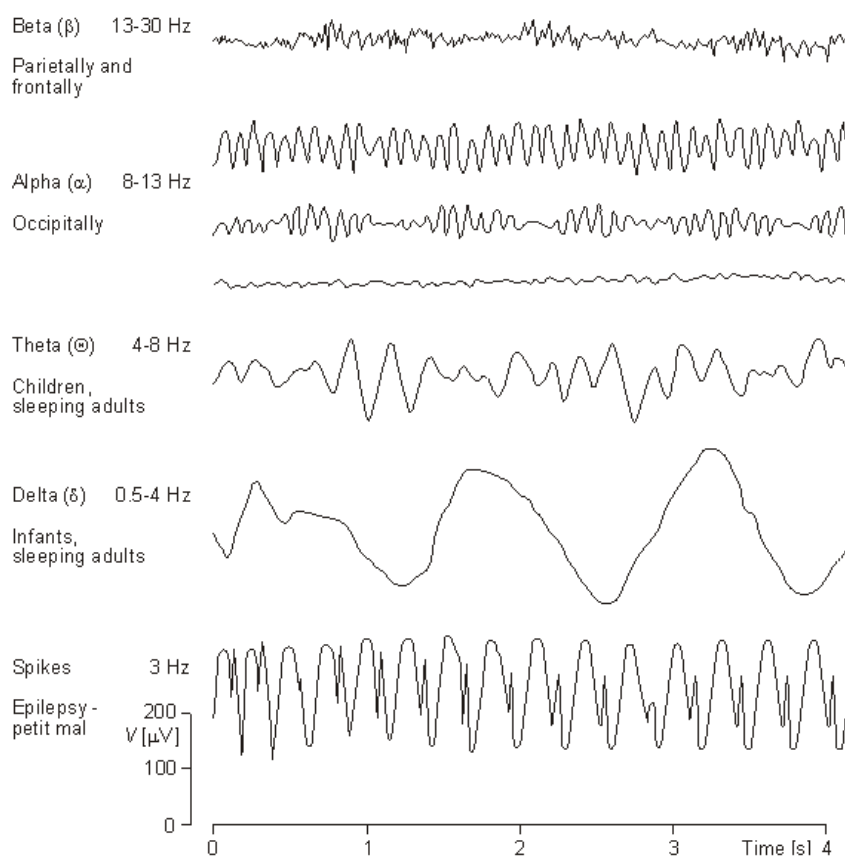
- amplituda magnetické indukce 1 – 2 pT
- frekvenční rozsah je 0,5 – 1 Hz.
- amplituda magnetické indukce dosahuje 50 – 70 pT
- frekvenční rozsah je 0,05 – 100 Hz.

✚ **Evokovaný magnetoencefalogram**

- amplituda magnetické indukce 0,1 – 2 pT

✚ **Magnetookulogram**

- amplituda magnetické indukce 10 pT
- frekvenční rozsah je 0,1 – 100 Hz.



Obr. 1: Příklad EEG vln

Artefakty – jevy, které nemají fyziologický původ ve vyšetřovaném orgánu. Jsou způsobeny fyziologickými a vnějšími vlivy. Nutnost odstranit je ze záznamu. Dělíme je do dvou základních skupin:

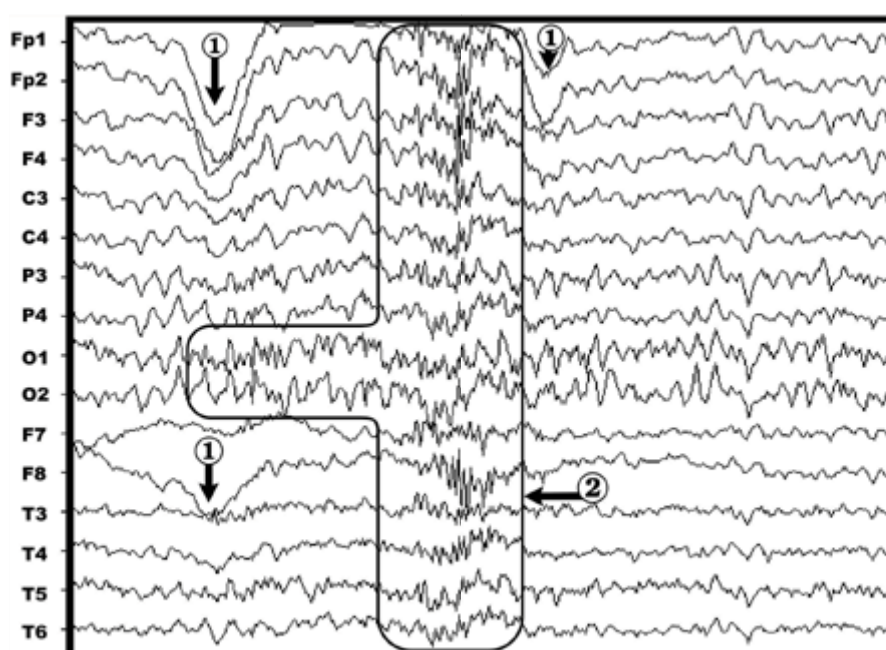
➤ **Technické (fyzikální) artefakty:**

- **elektrostatické potenciály** – nízká jakost elektrod, špatný kontakt elektroda – kůže, pohyb předmětů z elektrostatických materiálů (silonové prádlo, hřeben, ...)

- **sít'ový brum** – napětí sít'ového kmitočtu a jeho harmonické (odstraníme filtrem)
- **impulsní rušení** – způsobuje blízkost motorků (např. holicí strojek), zapínání přístrojů napájených ze stejné energetické sítě, přepínání svodů
- **nedostatečné stínění magnetických polí** – projevuje se zejména v biomagnetismu
- **šum elektronických obvodů** – dominantní je vliv vstupních obvodů biozesilovačů. Při digitalizaci se také uplatní kvantizační šum

➤ **Biologické artefakty – jsou to pohybové artefakty**

- **EOG** – mrkání
- **EKG** – mohou falešně naznačovat hrot u EEG (proto se nahrává i EKG)



Obr. 2: Artefakty 1- oční artefakt (mrkání), 2 - svalový artefakt



Řešený příklad 1.1

Zobrazte signály:

$$s(n) = \{1, 2, 0, 3, 1, 2\}:$$

$$\text{Jednotkový impuls - } \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Harmonický signál 1) $x = \cos \omega t$

2) součet sinusových signálů

$$x(n) = A \cdot \alpha^n$$

☑ Řešení :a) $s = [1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2];$

příkazy:	plot, stem, bar(s)	popis:	title('Sloupcový graf');
	figure(1);		xlabel('n');
	subplot(3,1,1);		ylabel('amplituda');
	grid, echo off;		

b) Jednotkový impuls: $N = 20;$
 $\text{delta} = [1 \ \text{zeros}(1, N-1)];$
 $\text{plot}(\text{delta});$

c) Harmonický signál

1) $n = 0:0.01:N-1;$	2) $t = \text{linspace}(0, 100, 500);$ % gener. lineární funkce	
$f = 25;$	$s = \sin(2\pi \cdot 13/500 \cdot t);$ % 13Hz sinusovka	
$\text{fvz} = 200;$	$r = \sin(2\pi \cdot 26/500 \cdot t);$ % 26Hz sinusovka	
$x = \cos(2\pi \cdot f \cdot n / \text{fvz});$	$\text{figure}(1); \text{clg}, \text{clf};$	
$\text{plot}(x);$	$\text{subplot}(2,1,1), \text{plot}(s), \text{hold on}, \text{plot}(r, 'g');$	
	$\text{line}([0 \ 500], [0 \ 0]); \text{hold off};$ % vykreslí sin. do 1 obr.	
	$\text{subplot}(2,1,2), \text{plot}(s), \text{hold on}, \text{plot}(r, 'g');$	
	$\text{axis}([384.8 \ 384.9 \ -0.001 \ 0.001]);$	
	$\text{line}([0 \ 500], [0 \ 0]); \text{hold off};$	
	$\% t=r+s;$	
	$\% \text{subplot}(2,1,1);$	} % = příkazy nejsou realizovány
	$\% \text{plot}(t); \text{hold on};$	

d) umocňování se provádí prvek po prvku, A, x jsou komplexní čísla

$N = 20;$
 $n = 0 : N-1;$
 $A = 1;$
 $\text{alfa} = 0.5;$
 $x = A \cdot (\text{alfa}.^n);$
 $\text{stem}(x);$

**Řešený příklad 1.2**

Ukázka dalších příkazů:

```
[b,a]=cheby1(7,1, 120/250);
rf=filter(b,a,r);
sf=filter(b,a,s);
figure(1)
subplot(2,1,1),plot(sf), hold on, plot(rf,'g'),
line([0 500], [0 0]), hold off;
subplot(2,1,2), plot(sf), hold on, plot(rf,'g'), line([0 500], [0 0]), axis([388.5 388.6 -0.001
0.001]); hold off;
```

```
% tf=rf+sf;
% subplot(2,1,2);
% plot(tf);hold off;
% zoom on, pause, zoom off,hold off    %pro potřeby zvětšení zájmové oblasti
pause;
figure(2)
for j = 1:10, [b,a]=butter(6, [j/10 - 0.05 j/10 + 0.05], 'stop');
zplane (b,a);zoom on;
pause;end;
pause
zoom off
```

b) Procvičte:

```
x = (0:0.01:2*pi);          b = ones(1,10);
y1 = sin(x);                 b = [b 5 3];
y2 = cos(x);                 b =(2:5);
plot(x,y1,x,y2);             c = [b,9:11];
                              a = b';

figure(1); fplot('sin',[0 4*pi])
figure(2); fplot('sin(x)',[0 4*pi],'-+')
figure(3); fplot('sin(x),cos(x)',[0 4*pi],'-x')
figure(4); fplot('abs(exp(-j*x*(0:9))*ones(10,1))',[0 2*pi],'-o')
figure(5); fplot('tan',[-2*pi 2*pi -2*pi 2*pi],'-*')
figure(6); fplot('tan(x),sin(x),cos(x)',[-2*pi 2*pi -2*pi 2*pi])
figure(7); fplot('sin(1 ./ x)', [0.01 0.1],1e-3)
```



Řešený příklad 1.3

Ze signálu $x(n) = e^{j(0,4\pi n - 0,5\pi)}$ vytvořte nový signál $y(n) = x(n) - x(n-1)$

$y(n)$ vyjádřete ve tvaru $y(n) = A \cdot e^{j(\omega n + \varphi)}$

Určete numerické hodnoty A , ω , φ

☒ **Řešení :**

$$a) \quad y(n) = x(n) - x(n-1) = e^{j(0,4\pi n - 0,5\pi)} - e^{j(0,4\pi(n-1) - 0,5\pi)} =$$

$$= e^{j0,4\pi n} \cdot e^{-j0,5\pi} - e^{j0,4\pi n} \cdot e^{-j0,4\pi} \cdot e^{-j0,5\pi} = e^{j0,4\pi n} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-j0,4\pi})$$

$$1 - e^{-j0,4\pi} = 1 - [\cos(-0,4\pi) + j \sin(-0,4\pi)] = 0,691 + j0,951 = 1,176 \cdot e^{j0,3\pi}$$

$$b) \quad y(n) = e^{j0,4\pi n} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot 1,176 \cdot e^{j0,3\pi} = 1,176 \cdot e^{j0,4\pi n} \cdot e^{-j0,2\pi} = 1,176 \cdot e^{j(0,4\pi n - 0,2\pi)}$$

$$c) \quad A = 1,176, \quad \omega = 0,4\pi, \quad \varphi = -0,2\pi$$

**Text k prostudování**

[1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005

**Další zdroje, použitá literatura**

[1] Svatoš, J.: Biologické signály I. Geneze, zpracování a analýza. Skriptum ČVUT
FEL, 1995, (ISBN 80-01-00884-3)

[2] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc.,
2000 Reference

**Otázky 1**

1. Co znamená:
 - a) periodický signál
 - b) ergodický proces
 - c) stacionární proces
2. Co nazýváme EEG, EKG, VKG, EOG, MKG, EGG

**Úlohy k řešení 1**

1. Seznamte se s příkazy v MATLABu:
 - a) `fid = fopen(...)`, `[A,count] = fread(...)`, `subplot(...)`, `plot(...)`,
 - b) funkcemi: `lookfor square`
`help square`
2. Zobraďte:
 - a) Jednotkový skok $u(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$
 - b) Obdélníkový signál
 - c) $x(n) = a^n \quad a = (r \cdot e^{j\Theta})^n \Rightarrow a = r^n \cdot e^{j\Theta n} = r^n (\cos \Theta n + j \sin \Theta n)$
3. Je zadáno: $x(t) = 2 \cdot \cos(200\pi t + \pi/3) + \sqrt{2} \cdot \cos(200\pi t - 3\pi/4)$
 - a) Určete fázor reprezentující oba sinusové signály a nakreslete je v komplexní rovině
 - b) Použijte fázory získané v bodě a) k vyjádření tvaru
 $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
 - c) Nalezněte komplexní signál $z(t)$, pro který platí, že $x(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\}$



Klíč k řešení

2) a)

```
1) u=ones(1,N);
   plot(u);
```

```
2) x=zeros(1,32);
   x1=ones(1,6);
   x=[x1 x(7:25) x1(1:5)];
   plot(x)
```

b)

```
t = 0:.002:2.5;
y = square(2*pi*3*t);
plot(t,y);
y = (1:10)
```

c)

```
theta = 0.5236;
r = 0.5;
N = 20;
n = 0:N-1;
x = (r.^n).*exp(j*theta*n); % .* nestejný počet prvků ve sloupcových vektorech
stem(abs(x));
```

3)

a) fázory: $2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 2 \cdot e^{j60^\circ}$; $\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{4}} = 2 \cdot e^{-j135^\circ}$

b) $x(t) = 0,732 \cdot \cos(200\pi t + \pi/2)$

c) $z(t) = j0,732 \cdot e^{j200\pi t}$



Korespondenční úkol

- Seznam se s formátem dat firmy Brain-Quick
- načti a zobraz minimálně 3 kanály EEG signálu a kalibrační kanál

Práci odevzdejte do 14 dní po zadání domácí úlohy.

2. PŘEDZPRACOVÁNÍ DAT

2.1. Analogově digitální převodník



Čas ke studiu: 1 hodina



Cíl Po prostudování kapitoly budete umět

- definovat Nyquistovu frekvenci
- popsat převod analogového signálu na číslicový a naopak
- vyřešit převod analogového signálu na číslicový a naopak



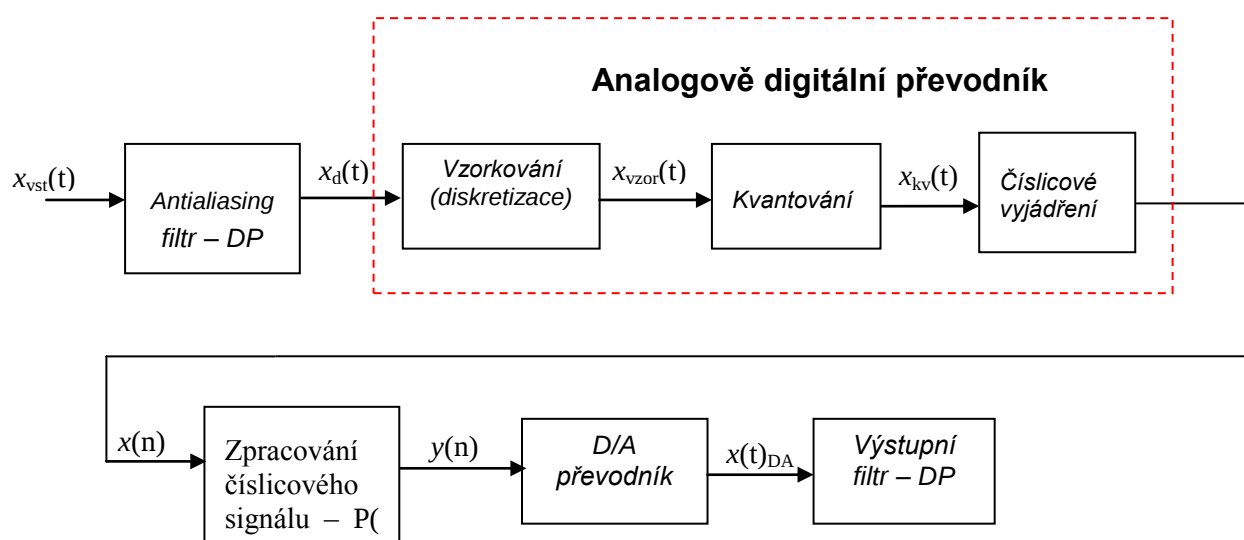
Pojmy k zapamatování 2

Aliasing filtr, vzorkování, kvantování, kódování, spektrum.



Výklad

DSP – Digital Signal Processing – systém pracující v reálném čase (real time)



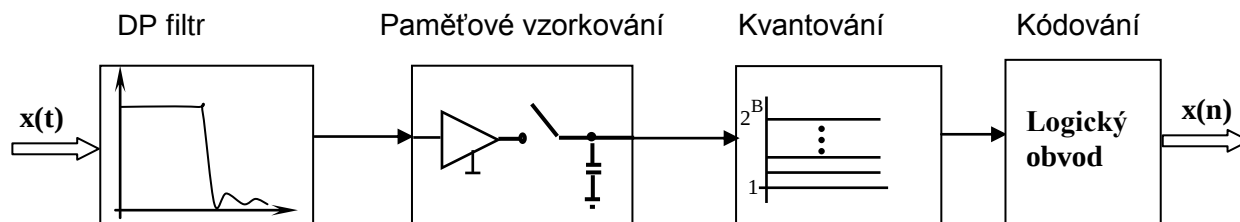
Obr. 3: Blokové schéma číslicového zpracování signálu

□ Analogově digitální převodník

Převode původně spojitý elektrický biosignál na diskrétní posloupnost vzorků signálu vybraných v pravidelných (ekvidistančních) časových intervalech v následujících krocích:

- ✓ Signál je vzorkován

- ✓ Amplituda každého vzorku je kvantována do jedné z 2^B úrovní (B – počet bitů A/D převodníku)
- ✓ Hodnota amplitudy je zakódována (nejčastěji binární kód), každé slovo je délky B bitů.



Obr. 4: A/D převodník

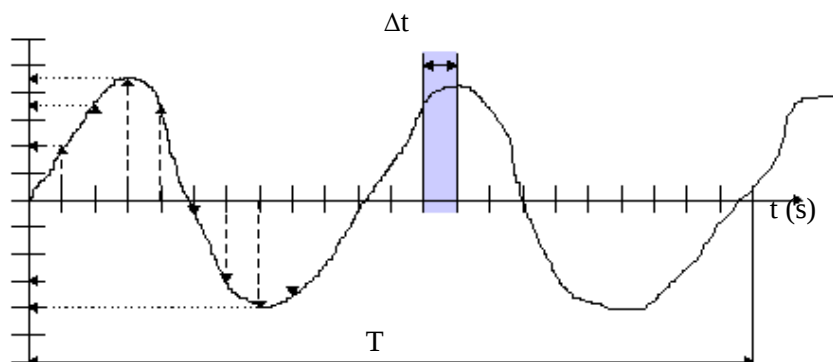
DP filtr – musí být analogový (použití digitálního filtru vyžaduje předchozí vzorkování). Je to tzv. antialiasingový filtr s mezním kmitočtem do $1/2$ vzorkovacího kmitočtu.

Vzorkování – při vzorkování musí být dodržen vzorkovací teorém (Nyquistův)

$$f_{vz} \geq 2 \cdot f_{max} \quad (1)$$

kde f_{max} je nejvyšší frekvence obsažená v signálu. Čím vyšší vzorkovací frekvence tím lépe.

Vzorkování **Sample – Hold** (S – H) je paměťové vzorkování (sejmutá hodnota vzorku je pamatována až do příchodu dalšího vzorku, během převodu se nemění).



Obr. 5: Vzorkování – převod spojitého signálu do číslicového tvaru

Interval pozorování T: doba měření úseku signálu

Perioda vzorkování Δt : vzdálenost mezi dvěma měřeními

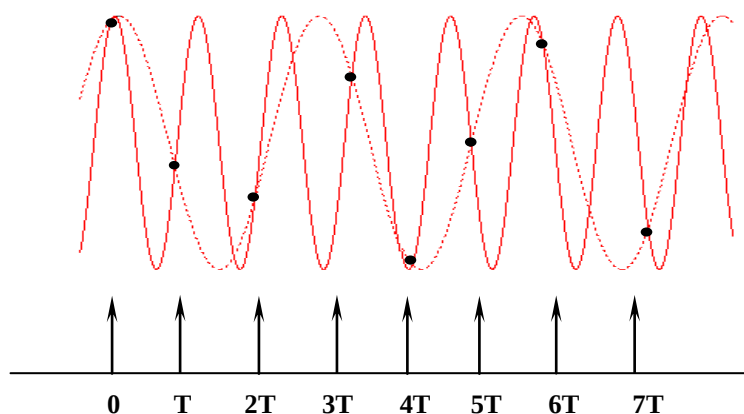
Vzorkovací frekvence f_{vz} : kmitočty A/D převodníku, platí pro něj

$$f_{vz} = \frac{1}{\Delta t} \quad (2)$$

Vzorkovací frekvence např. 100 Hz tedy znamená, že v každé vteřině převedeme 100 vzorků signálu.

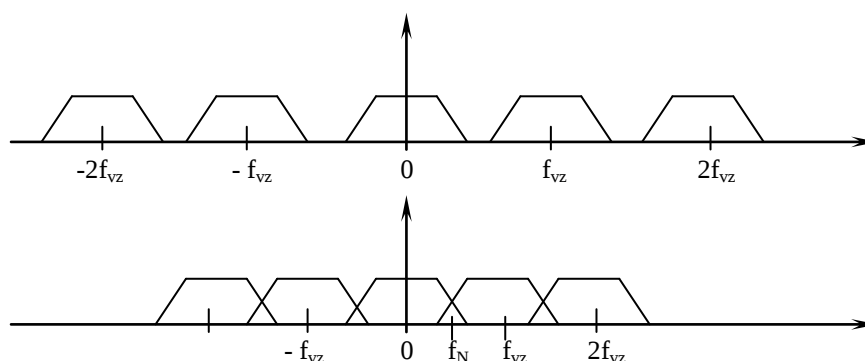
Problémy vzorkování:

- **Aliasing** – jev vznikající při nedodržení (1). Způsobuje, že z vzorků signálu již není možné rekonstruovat původní signál.
- a) **aliasing v časové oblasti:** Vzorkovací frekvence je příliš nízká – maskování vyšších frekvencí jako nižší frekvence.



Obr. 6: Aliasing – chybná interpretace vyšších kmitočtů vlivem nízké vzorkovací frekvence (šipky). Výsledný signál je označen přerušovanou čarou

- b) **aliasing v kmitočtové oblasti:** dochází k slévání spekter signálu, takže nelze rekonstruovat signál.

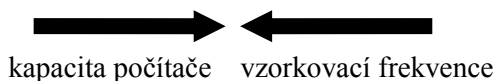


Obr. 7: Správně a) vzorkovaného signálu
b) podvzorkovaného signálu

V praxi: vstupní DP antialiasing filtr – $A_{\min} = 20 \cdot \log(\sqrt{1,5} \cdot 2^{B+1})$

- **Vzorkovací frekvence příliš vysoká** – naměříme více dat v každé vteřině, ale neúměrně vzrůstá požadavek na paměť počítače. (např.: 20 min EEG představuje při frekvenci vzorkování 100 Hz 2 400 000 čísel ve 20 kanálech.

Proti sobě tedy navzájem působí dva protichůdné požadavky



Např. pro EEG by tedy teoreticky stačilo vzorkovat frekvencí $60 \text{ Hz} = 2 \times 30 \text{ Hz}$. Pokud samozřejmě zvolíme frekvenci vyšší, tím lépe. V praxi se pro EEG používají vzorkovací frekvence $100 - 256 \text{ Hz}$.

- **Kvantování a kódování:** – amplitudy vzorků se kvantují po určitých kvantech (daných počtem bitů převodníku) do zvolených úrovní. Ty se pak vyjádří ve zvolené číselné soustavě (např. dvojkové).

- Kvantizační krok q :
$$q = \frac{U_{\text{šš}}}{2^B - 1} \approx \frac{U_{\text{šš}}}{2^B}$$

- Efektivní hod. signálu:
$$A_{\text{ef}} = \frac{q \cdot 2^{B-1}}{\sqrt{2}}$$

kvantizační chyba pro každý vzorek – e

Střední hodnota čtverce kvantizační chyby s předpokladem stejné pravděpodobnosti chyby v intervalu $\langle -\frac{q}{2}, \frac{q}{2} \rangle$ je:

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} \Delta^2 d\Delta = \frac{q^2}{12}$$

což odpovídá energii šumu.

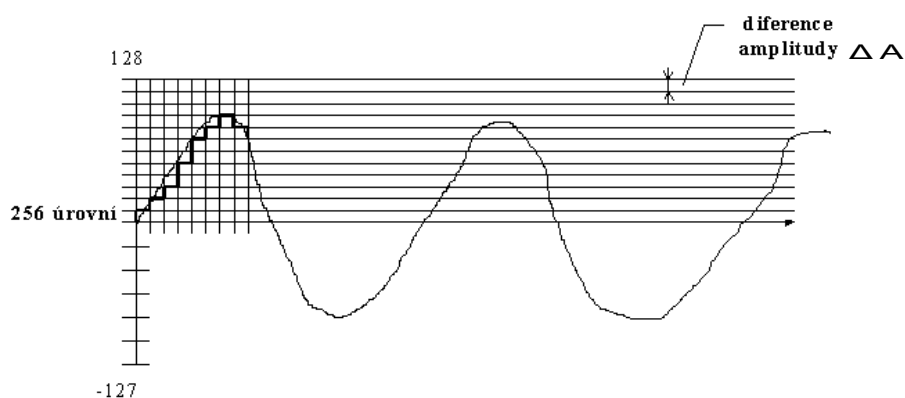
Poměr signál/šum SQNR:

$$\begin{aligned} SQNR &= 10 \cdot \log \left(\frac{A^2 / 2}{q^2 / 12} \right) = 10 \cdot \log \frac{(q \cdot 2^{B-1} / \sqrt{2})^2}{(q / 12)^2} = 10 \cdot \log (\sqrt{1,5} \cdot 2^B) = \\ &= 10 \log 1,5 + B 20 \log 2 = 1,76 + 6,02B \text{ dB} \end{aligned}$$

Prodloužení slova o každý bit znamená zmenšení kvantizačního šumu o 6 dB.

Např.:

8 bitový převodník je schopen převádět čísla v rozsahu $0 - 255$, tedy v 256 úrovních včetně nuly ($2^8 = 256$). Znamená to tedy, že hodnota amplitudy napětí je reprezentováno číslem v rozsahu -127 až $+128$ – viz obr. 8.



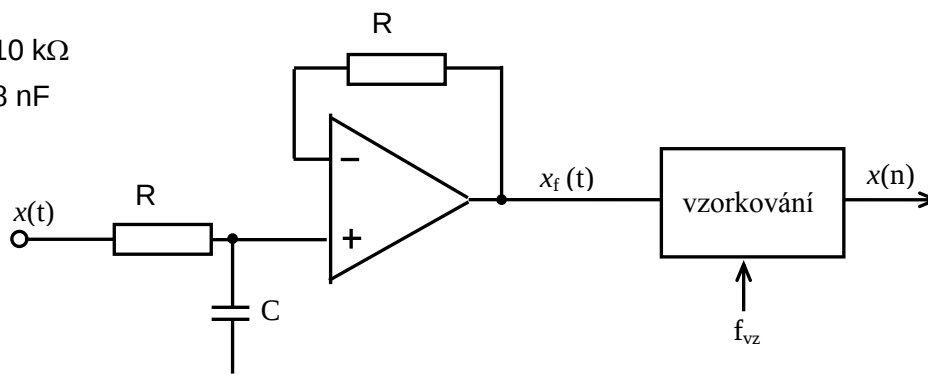
Obr. 8: Kvantizace úrovní pro 8 bitový A/D převodník

**Řešený příklad 2.1**

Jaká je potřebná vzorkovací frekvence na obr. 9, je-li požadováno, aby chyba způsobená aliasingem byla menší než 2 % úrovně signálu v pásmu propustnosti?

$R = 10 \text{ k}\Omega$

$C = 8 \text{ nF}$



Obr. 9: Zapojení k příkladu 2.1

✓ Řešení :

Přenosová funkce filtru (filtr 1. řádu) je

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2} \quad \equiv \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} \quad \text{kde } \omega = 2\pi f$$

Pro f_c (uvážujeme Butterworthovu aproximaci) platí:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^{-9}} \cong 2 \text{ kHz}$$

Požadovanou chybu (obr. 10) stanovíme jako 2% z hodnoty přenosové funkce $|H(f_c)|$ na frekvenci f_c , tj. 2 % z hodnoty $1/\sqrt{2}$ nebo-li z hodnoty 0,7071

$$|H(f_{2\%})| = \frac{0,7071}{0,02} = 14,142 \cdot 10^{-3}$$

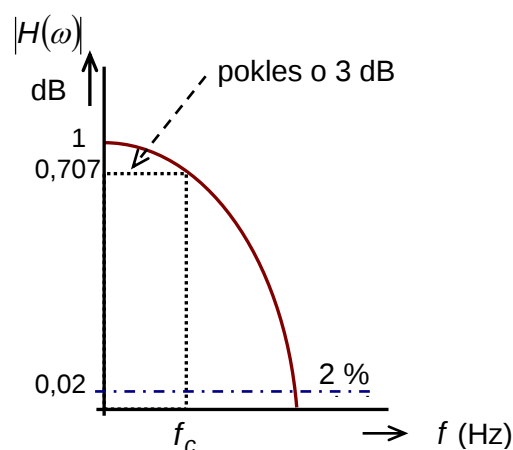
Dosažením do vztahu pro přenosovou funkci získáme hodnotu f

$$|H(\omega_{2\%})|^2 = \frac{1}{1 + (f_{2\%}/f_c)^2}$$

$$14,142 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_{2\%}/2 \cdot 10^3)^2}} \Rightarrow f_{2\%} = 141,41 \text{ kHz}$$

Minimální vzorkovací frekvence filtru je:

$$f_{vz}(\min) = f_{2\%} + f_c = (2 + 141,41) \cdot 10^3 = 143,41 \text{ kHz}$$



Obr. 10: Přenosová funkce filtru



Řešený příklad 2.2

Jaká je kvantovací úroveň signálu u 8 bitového převodníku, je-li amplituda signálu v rozsahu od -1 do +1 mV?

☒ **Řešení :**

kvantizačních úrovní: $2^8 = 256$

diference $\Delta U = (1 - (-1))/256 = 7,8 \mu\text{V}$



Řešený příklad 2.3

Určete pro požadovaný signál $x(t) = 2 \cdot \cos 100\pi t$

a) Minimální vzorkovací frekvence f_{vz}

b) Určete diskretní signál, který získáte po vzorkování (vzorkovací frekvence $f_{vz} = 200 \text{ Hz}$)

☒ **Řešení :**

a) $2\pi f = 100\pi \Rightarrow f = 50 \text{ Hz}$

Minimální vzorkovací frekvence $f_{vz} = 100 \text{ Hz}$

b) Signál je vzorkován $f_{vz} = 200 \text{ Hz}$

$$x(n) = 2 \cdot \cos\left(\frac{100\pi}{200}\right)n = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)n$$



Otázky 2

1. Proč je zařazen antialiasingový filtr před A/D převodníkem?
2. Jak se projevuje podvzorkování signálu a) v časové oblasti?
b) ve frekvenční oblasti?
3. Jaká je kvantovací úroveň signálu u 12 bitového převodníku, je-li amplituda signálu 5 mV?



Úlohy k řešení 2.1

1. Určete minimální vzorkovací frekvenci analogového signálu
 $u_1(t) = 5\sin 300\pi t + 3\cos 50\pi t - \sin 100\pi t$ V.
2. Určete rozlišovací schopnost 12 bitového A/D převodníku. Jmenovitý rozsah vstupního napětí převodníku je od -5 V do +5 V.
3. Určete vzorkovací frekvenci filtru z příkladu 3.2 jsou-li zadány hodnoty odporů $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ a $C = 28,42 \text{ nF}$



Klíč k řešení

1. $f_1 = 150 \text{ Hz}$; $f_2 = 25 \text{ Hz}$; $f_3 = 50 \text{ Hz}$

Minimální vzorkovací frekvence je $f_{vz} = 300 \text{ Hz}$

2. **Diference** $\Delta U = 2,44 \text{ mV}$, $7,8 \text{ mV}$

3. $f_c = 1 \text{ kHz}$; $f_{2\%} = 70,704 \text{ kHz}$

Minimální vzorkovací frekvence je $f_{vz} = 71,704 \text{ kHz}$



Text k prostudování

[1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005



Další zdroje, použitá literatura

[2] Svatoš, J.: Biologické signály I. Geneze, zpracování a analýza. Skriptum
ČVUT FEL, 1995, (ISBN 80-01-00884-3)

[3] Uhlíř, J., Sovka, P.: Číslíkové zpracování signálů. Vydavatelství ČVUT,
Praha 1995, (ISBN 80-01-01303-0)

- [4] Proakis, J.G., Manolakis, D.G.: Introduction to Digital Signal Processing. Macmillan Publishing Company, New York, 1988 (ISBN 0-02-396815-X)]
- [5] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc., 2000 Reference

3. FILTRACE



Čas ke studiu: 2 hodiny



Cíl Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat druhy filtrů
- popsat vlastnosti filtrů
- navrhnou číslicový filtr



Pojmy k zapamatování 3

Filtry IIR, FIR, dolní propust, horní propust, pásmová propust a pásmová zadrž, fázová charakteristika, impulsní odezva.



Výklad

Protože biologický signál obsahuje často nežádoucí artefakty (např. EEG síťové rušení, svalovou aktivitu ...), je nutno před začátkem zpracování záznam filtrovat. Digitální filtrace je tedy jeden z nejpoužívanějších nástrojů počítačového zpracování biosignálů. Podrobnou teorii filtru nalezneme např. v [2], [3], [4], [5], [6] a [7]. Není však jednoduché navrhnout kvalitní filtr, který by byl současně dostatečně rychlý z výpočetního hlediska. Problémem při návrhu je přesnost a rychlost proti požadované kvalitě.

□ Dělení filtrů

Rozlišujeme filtry:

- FIR** (Finite Impulse Response – s konečnou dobou odezvy) – jsou vždy stabilní, mají lineární fázovou charakteristiku
- IIR** (Infinite Impulse Response – s nekonečnou dobou odezvy - rekurentní) – jsou to rekursivní filtry, bývají nižšího řádu, mají nelineární fázovou charakteristiku – ovlivňují fázi, při nesprávném návrhu mohou být nestabilní

Při filtraci biologického signálu požadujeme, aby fázová charakteristika filtru byla vždy lineární. Nejčastěji biologický záznam filtrujeme filtrem s konečnou impulsní odezvou $h(n)$ (Finite Impulse Response - FIR). Tento filtr je plně definován N hodnotami odezvy.

Matematickým modelem FIR filtru v časové oblasti je diferenční rovnice

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) \quad (3.1)$$

kde

$y(n)$ představuje současnou výstupní hodnotu filtru,

$x(n)$ představuje současnou vstupní hodnotu filtru,

$x(n-N)$ reprezentuje N dřívějších vstupních vzorků filtru,

a_k jsou koeficienty diferenční rovnice.

Z definice impulsní odezvy vyplývá, že koeficienty a_k z (3.1) představují vzorky h_k impulsní charakteristiky $h(n)$ FIR filtru, takže platí

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(n-k) \quad (3.2)$$

Vztah (3.2) je také vyjádření tzv. přímého realizačního algoritmu, takže hodnoty impulsní charakteristiky jsou přímo systémovými realizačními konstantami.

Vlastnosti filtru v časové oblasti mohou být ve frekvenční oblasti popsány vztahem

$$Y(z) = X(z) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} \quad (3.3)$$

což odpovídá vztahu (3.2) po transformaci z .

Ze vztahu (3.3) pak můžeme definovat přenosovou funkci filtru $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} \quad (3.4)$$

Frekvenční charakteristiku filtru získáme použijeme-li substituci $z = e^{j\Omega}$, vztah (3.4) nabývá po úpravě tvar

$$H(\Omega) = h(k) \cdot e^{-j\Omega k}, \quad \text{kde } \Omega = \frac{2\pi n}{N} \quad (3.5)$$

Vztah (3.5) odpovídá diskrétní Fourierově transformaci (DFT). Přenosová funkce $H(\Omega)$ ve vztahu (3.5) je periodická, vyjádřená ve tvaru Fourierovy řady s koeficienty h_k .

FIR filtry jsou navrženy tak, že jejich fázová charakteristika je lineárně závislá na frekvenci, tedy fázové zpoždění je konstantní, takže časové poměry zůstanou nezměněny, což je pro analýzu zásadní. K tomu postačuje, aby impulsní charakteristika systému splňovala jednu ze základních symetriačních podmínek filtru:

$$h(n) = h(N-1-n) \quad \text{nebo} \quad h(n) = -h(N-1-n), \quad (3.6)$$



Řešený příklad 3.1

Návrh FIR filtru – metoda váhování impulsní charakteristiky (okénková metoda):

Metoda váhování impulsní charakteristiky vychází ze znalosti obecně neomezené impulsní charakteristiky h_D , popisující přesně požadovaný filtr.

☑ Řešení :

Postup:

- a) Požadavky na ideální frekvenční odezvu filtru $H(\Omega)$ – frekvenční charakteristika filtru je periodická funkce kmitočtu a lze ji vyjádřit nekonečnou Fourierovou řadou s periodou $2\pi/T$

$$H_D(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_D(n) e^{-j\omega T}$$

b) Impulsní odezvu $h_D(n)$ získáme pomocí inverzní FFT pro požadované frekvence

$$h_D(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} H_D(\omega) \cdot e^{jn\omega T} d\omega$$

frekvenční charakteristika je také spektrum nekonečného signálu

c) Omezení délky posloupnosti h_D na zvolený rozsah N členů:

$$h_D(t) = \dots + h_{-2}\delta(t+2T) + h_{-1}\delta(t+T) + h_0\delta(t) + h_1\delta(t-T) + h_2\delta(t-2T) + \dots$$

jehož délku omezíme vynásobením konečným signálem (tzv. oknem) $w(n)$ o délce N – viz tabulka druhy oken

d) Koeficienty FIR filtru získáme vynásobením $h(n) = h_D(n) \cdot w(n)$

K dosažení lineární fázové charakteristiky je nutné posunout impulsní odezvu $h(n)$ tak, aby začínala v „nule“.

Při realizaci digitálního filtru bylo nutné určit složitost filtru - tedy zvolit N . Pro odhad N jsou uváděny různé empirické vztahy např.: pro dolnoproustní filtr – viz obr. 11

$$N = 1 + \frac{D_{\infty}(\delta_1, \delta_2)}{\omega_2 - \omega_1} - f(\delta_1, \delta_2) \cdot (\omega_2 - \omega_1)$$

kde

$$D_{\infty}(\delta_1, \delta_2) = \left[0,005309(\log \delta_1)^2 + 0,07114 \log \delta_1 - 0,4761 \right] \cdot \log \delta_2 \\ - \left[0,00266(\log \delta_1)^2 + 0,5941 \log \delta_1 + 0,4278 \right]$$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 0,51244 \log \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right) + 11,01$$

Jednodušší je Kaiserův vztah např. pro filtr DP:

$$N \geq \frac{-20 \cdot \log \sqrt{\delta_1 \cdot \delta_2} - 13}{14,6(\omega_s - \omega_p)/2\pi}$$

kde δ_1 je zvolené zvlnění v pásnu propustnosti

δ_2 je zvolené zvlnění v pásnu útluhu

ω_p je hraniční frekvence v pásmu propustnosti

ω_s je hraniční frekvence v pásmu útlumu

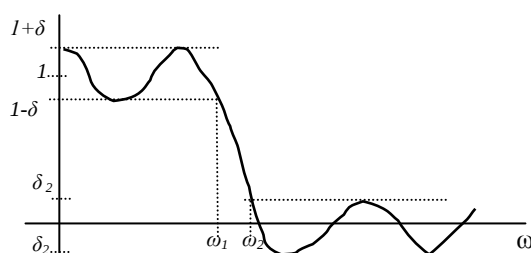
Tento vztah je použit pro první odhad. Pro zvolené hodnoty $\delta_1 = 0,01$, $\delta_2 = 0,001$, $\omega_p = 28$ Hz, $\omega_s = 32$ Hz obdržíme

$$N \geq \frac{-20 \log \sqrt{0,01 \cdot 0,001} - 13}{14,6(32/128 - 28/128)/2\pi} = 509,5$$

Pro dosažení symetrie typu $h(n) = h(N-1-n)$ a N liché volíme první nejvyšší odhad $N = 511$.

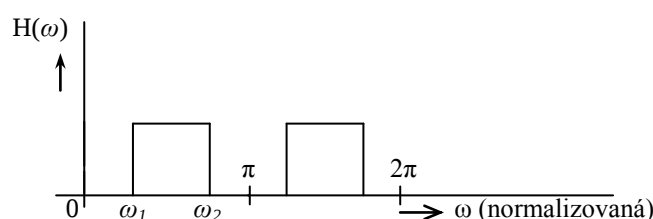
Tab. 1: Ideální impulsní odezvy filtru

Typ filtru	Ideální impulsní odezva $h(n)$	
	$h(n), n \neq 0$	$h(0)$
DP	$2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
HP	$-2f_c \frac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1 - 2f_c$
PP	$2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2 - f_1)$
PZ	$2f_1 \frac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \frac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1 - 2(f_2 - f_1)$



Obr. 11: Frekvenční charakteristika dolnoproustního filtru

Např. z vlastností signálu EEG vyplynou požadavky na charakteristické frekvence pásmové propusti: $\omega_1 = 0,5$ Hz a $\omega_2 = 30$ Hz – obr.12. Pro symetrii $h(n) = h(N-1-n)$ a N liché platí:



Obr. 12: Přenosová charakteristika pásmové propusti

$$H(\Omega) = h(0) + 2 \sum_{k=0}^{(N-1)/2} h(n) \cos n\Omega \quad (3.7)$$

$$\text{kde } h(0) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi} \quad \text{a} \quad h(n) = \frac{1}{\pi n} [\sin \omega_2 n - \sin \omega_1 n] \quad (3.8)$$

Podle druhu použitého okna – viz Tab. 2 orientačně odhadneme řád filtru.

Např.:

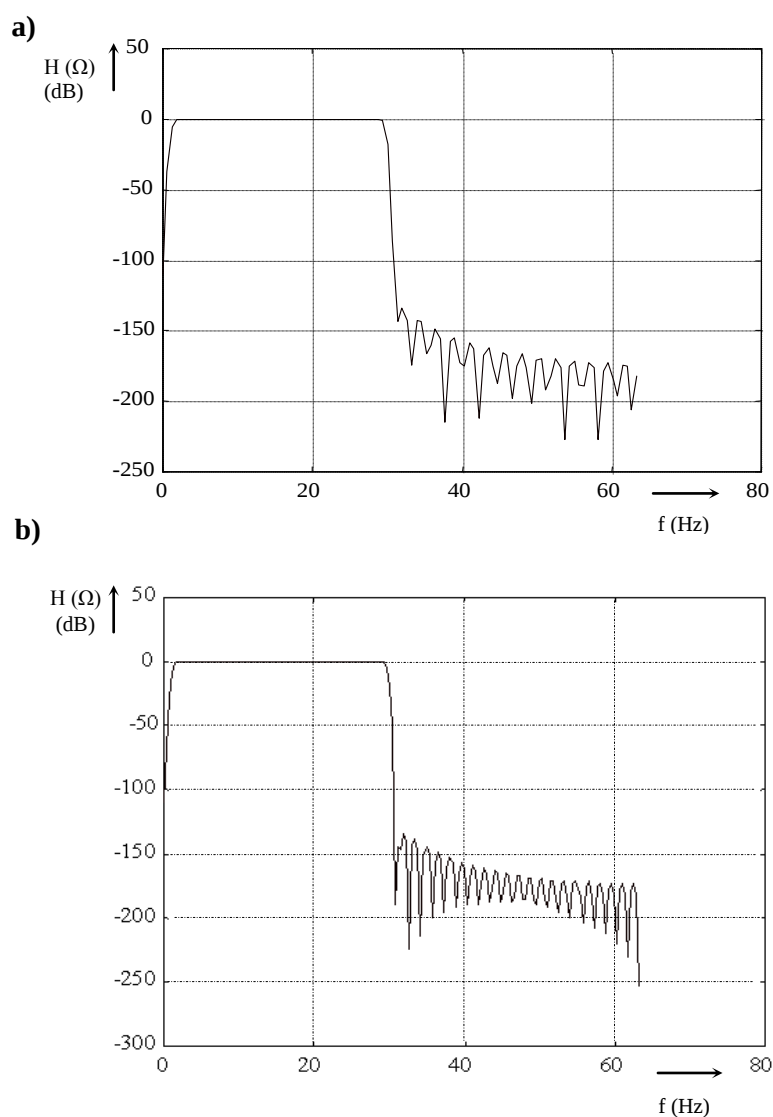
$$\text{Hamming : } \Delta f = 3,3 / N \Rightarrow 0,5/128 = 0,0032 \Rightarrow N = 3,3/0,0032 = 845$$

$$\text{Hanning : } \Delta f = 3,1 / N \Rightarrow N = 3,1/0,0032 = 968$$

Aby byl potlačen vliv Gibbsova jevu, je příslušná impulsní charakteristika násobena váhovou funkcí $\omega(n)$, která představuje „okénko“. Pomocí ní zkrátíme impulsní odezvu $h(n)$ na kauzální konečnou posloupnost

$$h(n) = h_i(n) \cdot \omega(n) \quad (3.9)$$

kde $h_i(n)$ je impulsní odezva vypočtená podle vztahu (3.7).

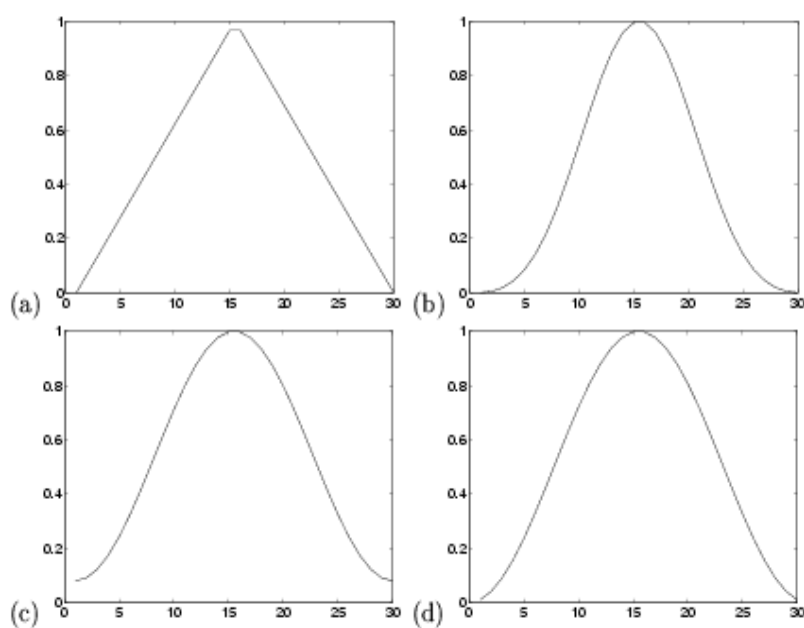


Obr. 13: Přenosová charakteristika filtru – pásmová propust pro EEG signál

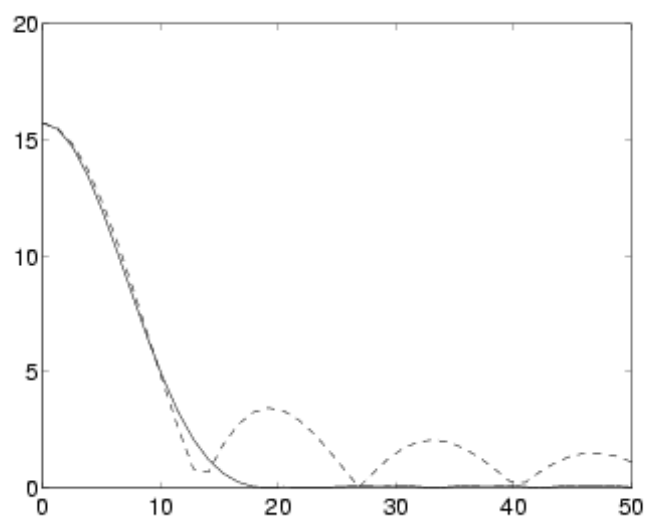
- a) Hammingovo okno – $N = 845$
- b) Hanningovo okno – $N = 968$

Tab. 2: Některé druhy oken

Typ okna	Šířka pásma přechodu	Zvlnění v PP	Poměr hl. laloku k vedlejšímu laloku (dB)	Potlačení SP (dB)	Oknovací funkce $w(n)$, $ n \leq (N-1)/2$
Obdélníkové	$0.9/N$	0.7416	13	21	1
Hanningovo	$3.1/N$	0.0546	31	44	$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right)$
Hammingovo	$3.3/N$	0.0194	41	53	$w(n) = 0,54 + 0,46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right)$
Blackmanovo	$5.5/N$	0.0017	57	74	$w(n) = 0,42 + 0,5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) + 0,08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N} \right)$
Kaiserovo	$2.93/N$ ($\beta=4.54$)	0.0274		50	$\frac{I_0 \left(\beta \left\{ 1 - [2n/(N-1)]^2 \right\}^{1/2} \right)}{I_0(\beta)}$
	$4.32/N$ ($\beta=6.76$)	0.00275		70	
	$5.71/N$ ($\beta=8.96$)	0.000275		90	



Obr. 14: Okno: a) Bartletovo, b) Blackmanovo,
c) Hammingovo d) Hanningovo pro $N = 30$



Obr. 15: Frekvenční odezva Hammingova okna (plná čára) a obdélníkového okna (přerušovaná čára)



Řešený příklad 3.2

Navrhněte Chebysevovský filtr I: řád s ideální přenosovou funkcí:

PP $w_p = 0.2\pi$ zvlnění 0.5 dB, SP $w_s = 0.366\pi$ zvlnění 19 dB, $f_vz = 1$ kHz. Úlohu řešte v MATLABu.

Řešení :

```
%  $\omega_p = 2 \cdot \pi f_p / f_{vz}$ ;  $\omega_s = 2 \cdot \pi f_s / f_{vz}$ ;  $\omega_p = 100$  Hz  $\omega_s = 183$  Hz
```

```
N = 512;
```

```
Rp = 1;
```

```
Rs = 20;
```

```
fvz = 1000;
```

```
wp = 0.2*pi;
```

```
ws = 0.3*pi;
```

```
wh = 0.4*pi;
```

```
wd = 0.7*pi;
```

```
Wp = 100/(fvz/2);
```

```
Ws = 150/(fvz/2);
```

```
[n,wn] = cheb1ord(0.2,0.3,Rp,Rs); % n = 4
```

```
% wn = 0.2
```

```
Wn = tan(wn*pi/2); % Wn = 0.3249
```

```
Wp = tan(wp/2); % Wp = 0.3249
```

```
Ws = tan(ws/2); % Ws = 0.5095
```

```
[z,p,k] = cheb1ap(n,Rp);
```

```
% z = % p = % k =
```

```
% [] % -0.1395 + 0.9834i 0.2457
```

```
% -0.3369 + 0.4073i
```

```
% -0.3369 + 0.4073i
```

```
% -0.3369 - 0.4073i
```

```
% -0.1395 - 0.9834i
```

```
bn = k*poly(z); % bn = 0.2457
```

```
an = poly(p); % an = 1.0000*s^3 + 0.9528*s^2 + 1.4539*s + 0.2457
```

```
% an1 = [s^2 + 0.279072s + 0.98655]
```

```
% an2 = [s^2 + 0.673793s + 0.27939]
```

```
[h,w]= freqs(bn,an); % normovaná
```

```
figure(1);
```

```
subplot(2,1,1);
```

```
plot(w/pi,abs(h)), grid
```

```
title('Chebyshev I n = 4 normovaný');
```

```
ylabel('|H(w)|');
```

```
subplot(2,1,2);
```

```
plot(w/pi,angle(h)), grid
```

```
ylabel('faze(w)');
```

```
[r,p,k] = residue(bn,an); % normované res.
```

```
% r = % p = % k =
```

```
% -0.0663 - 0.1301i -0.1395 - 0.9834i []
```

```
% -0.0663 + 0.1301i -0.1395 + 0.9834i
```

```
% 0.0663 - 0.3463i -0.3369 + 0.4073i
```

```
% 0.0663 + 0.3463i -0.3369 - 0.4073i
```

```
% Vynásobíme komplexně sdružené póly
```

```
r1 = [-0.0663-0.1301i -0.0663+0.1301i];
```

```
p1 = [-0.1395-0.9834i -0.1395+0.9834i];
```

```
[num1,den1] = residue(r1,p1,k);
```

```

% num1 = -0.1326s -0.2744          % [num1,den1] = r(1)/p(1)+r(2)/p(2)
% den1 = 1*s^2 + 0.279072s + 0.9865    % [num2,den2] = r(3)/p(3)+r(4)/p(4)

r2 = [0.0663-0.3463i 0.0663+0.3463i];
p2 = [-0.3369+0.4073i -0.3369-0.4073i];

[num2,den2] = residue(r2,p2,k);

% num2 = 0.1326s + 0.3268
% den2 = 1*s^2 + 0.6738s + 0.2794

% -----
% Normovaná přenosová funkce má tvar:
%
%      (-0.1326s-0.2744)      (0.1326s+0.3268)
%      ----- + -----
%      (s^2+0.279072s+0.9865)   s^2 + 0.6738s + 0.2794
%
% -----

% odnormování pólů

epsilon = ((1-(10^(-0.05)^2))/(10^(-0.05)^2))^(1/2);    % epsilon = 0.5088

gama = ((1+(1+(epsilon^2))^(1/2))/epsilon)^(1/n);        % gama = 1.4290

beta = (gama+gama^(-1))/2;                               % beta = 1.0644

alfa = (gama-gama^(-1))/2;                               % alfa = 0.3646

% pól = sigma + j*omega
%      sigma = -alfa*Wp*sin[(2k+1)*pi/2*n] . . . k = 0,1, ... n-1
%      omega = beta*Wp*cos[(2k+1)*pi/2*n]

sigma1 = -alfa*Wp*sin((2*0+1)*pi/(2*n));    % sigma1 = -0.0453
sigma2 = -alfa*Wp*sin((2*1+1)*pi/(2*n));    % sigma2 = -0.1095
sigma3 = -alfa*Wp*sin((2*2+1)*pi/(2*n));    % sigma3 = -0.1095
sigma4 = -alfa*Wp*sin((2*3+1)*pi/(2*n));    % sigma4 = -0.0453

omega1 = beta*Wp*cos((2*0+1)*pi/(2*n));      % omega1 = 0.3195
omega2 = beta*Wp*cos((2*1+1)*pi/(2*n));      % omega2 = 0.1323
omega3 = beta*Wp*cos((2*2+1)*pi/(2*n));      % omega3 = -0.1323
omega4 = beta*Wp*cos((2*3+1)*pi/(2*n));      % omega4 = -0.3195

p1 = [sigma1 + j*omega1];
p2 = [sigma2 + j*omega2];
p3 = [sigma3 + j*omega3];
p4 = [sigma4 + j*omega4];

p = [p1 p2 p3 p4];

an_od = poly(p);          % an_od = [1 0.3096 0.1535 0.0255 0.0031]
p1 = [p1 p4];

```

```

an1_od = poly(p1);          % an1_od = 1.0000s^2 + 0.0907s + 0.1041
p2 = [p2 p3];
an2_od = poly(p2);          % an2_od = 1.0000s^2 + 0.2189s + 0.0295

[r,p,k] = residue(bn,an_od);    % odnormované res.

% r =                p =                k =
% -1.9318 + 3.7937i    -0.0453 + 0.3195i
% -1.9318 - 3.7937i    -0.0453 - 0.3195i
%  1.9318 -10.0946i    -0.1095 + 0.1323i
%  1.9318 +10.0946i    -0.1095 - 0.1323i

% Vynásobíme komplexně sdružené póly

r1 = [-1.9318+3.7937i -1.9318-3.7937i];
p1 = [-0.0453+0.3195i -0.0453-0.3195i];

[num1_od,den1_od] = residue(r1,p1,k)

% num1_od = -3.8636s -2.5992          % [num1_od,den1_od] = r(1)/p(1)+r(2)/p(2)
% den1_od = 1*s^2 + 0.0906s + 0.1041  % [num2_od,den2_od] = r(3)/p(3)+r(4)/p(4)

r2 = [1.9318-10.0946i 1.9318+10.0946i];
p2 = [-0.1095+0.1323i -0.1095-0.1323i];

[num2_od,den2_od] = residue(r2,p2,k);

% num2_od = 3.8636s + 3.0941
% den2_od = 1*s^2 + 0.2190s + 0.0295

% -----
% Odnormovaná přenosová funkce má tvar:
%
% (-3.8636s -2.5992)      (3.8636s + 3.0941)
% ----- + -----
% (s^2+0.0907s+0.1041)    s^2 + 0.2190s + 0.0295
%
% -----

[h1,w]= freqs(num1_od,an1_od);
[h2,w]= freqs(num2_od,an2_od);
h = h1 + h2;
figure(2);                % odnormovaná
subplot(2,1,1);
plot(w,abs(h)), grid
title('Chebyshev I n = 4  odnormovany');
ylabel('|H(w)|');
subplot(2,1,2);
plot(w,angle(h)), grid
ylabel('faze(w)');

```

```

%-----
% Metoda impulsní invariance:
%-----
[bz1,az1] =impinvar(num1_od,den1_od);
    % bz1 = -3.8636  1.2280
    % az1 =  1.0000  1.8147  0.9134

[bz2,az2] =impinvar(num2_od,den2_od);

    % bz2 = 3.8636  1.0456
    % az2 = 1.0000  1.7769  0.8033

%-----
% přenosová funkce má tvar:
%
%      -3.8636 + 1.2280*z^(-1)          3.8636 - 1.0456*z^(-1)
%  ----- + -----
%  1 - 1.8147*z^(-1) + 0.9134*z^(-2)   1 - 1.7769*z^(-1)+0.8033*z^(-2)
%
%-----

% H(z) = H1(z) + H2(z) - paralelní realizace
% y1(n) = (-3.8636)x(n) + 1.2280x(n-1) + 1.8147y(n-1) - 0.9134y(n-2)
% y2(n) = 3.8636x(n) - 1.0456x(n-1) + 1.7769y(n-1) - 0.8033y(n-2)

[h1,w]= freqz(bz1,az1,N,fvz);
[h2,w]= freqz(bz2,az2,N,fvz);
h = h1 + h2;
    figure(3);
    subplot(2,1,1);
    semilogx(w,abs(h)), grid
    title('Chebyshev I n =4 DP metoda imp. invar');
    xlabel('f [Hz]');
    ylabel('|H(w)|');
    subplot(2,1,2);
    semilogx(w,angle(h)),grid
    xlabel('f [Hz]');
    ylabel('faze(w)');

%-----
% Přepočet na horní propust
%-----

beta = (cos((wp+wp)/2))/(cos((wp-wp)/2));    % beta = 0.8090

% bz1 = -3.8636 + 1.2280*z^(-1)
% az1 =  1.0000 - 1.8147*z^(-1) + 0.9134*z^(-2)

% bz2 =  3.8636 - 1.0456*z^(-1)
% az2 =  1.0000 - 1.7769*z^(-1) + 0.8033*z^(-2)

% za výraz z^(-1) dosadíme: z^(-1) = -(z^(-1)-beta)/(1-beta*z^(-1))

```

```
% -----
% přenosová funkce má tvar:
%
% -2.8702+4.2196*z^(-1)-1.5352*z^(-2)    2.9876-4.5214 *z^(-1)+1.6828z^(-2)
% ----- + -----
% 0.1297-0.0935*z^(-1)+0.0998*z^(-2)    0.0882+0.0221*z^(-1)+0.0203*z^(-2)
%
% -----

bz1_HP = [-2.8702 4.2196 -1.535201];
az1_HP = [0.129708 -0.0934942 0.099789];

bz2_HP = [2.98761 -4.52138 1.682763];
az2_HP = [0.0882279 0.0221076 0.0202698];

[h1,w]= freqz(bz1_HP,az1_HP,N,fvz);
[h2,w]= freqz(bz2_HP,az2_HP,N,fvz);
h = h1 + h2;
    figure(4);
    subplot(2,1,1);
    semilogx(w,abs(h)), grid
    title('Chebyshev I n =4 HP metoda imp. invar');
    ylabel('|H(w)|');
    xlabel('f [Hz]');
    subplot(2,1,2);
    semilogx(w,angle(h)),grid
    xlabel('f [Hz]');
    ylabel('faze(w)');

% H(z) = H1(z) + H2(z) - paralelní realizace
% y(n) = y1(n) + y2(n)
```



Otázky 3

1. Proč požadujeme lineární fázovou charakteristiku pro filtr biologického signálu?
2. Jaké okno použijete při filtraci signálu a proč?



Úlohy k řešení 3

1. V Matlabu přepočtete navržený filtr z příkladu 3.2. na pásmovou propust.
2. V Matlabu přepočtete navržený filtr z příkladu 3.2. na pásmovou zadrž.



Klíč k řešení

1. % -----
 % Přepočet na pásmovou propust
 % -----

```

Wp = 0.3249;
wd = 0.4*pi;
wh = 0.7*pi;
Wh = tan(wh/2);    % Wh = 1.3764
Wd = tan(wd/2);    % Wd = 0.7265

k = cot((Wh+Wd)/2)*tan(Wp/2);    % k = 0.0937

gama = (cos((wh+wd)/2))/(cos((wh-wd)/2));    % gama = 6.4381e-017 = 0
gama = 0;
beta1 = (2*gama*k)/(k+1);    % beta1 = 0
beta2 = (k-1)/(k+1);    % beta2 = -0.8287

% bz1 = -3.8636 + 1.2280*z^(-1)
% az1 = 1.0000 - 1.8147*z^(-1) + 0.9134*z^(-2)

% bz2 = 3.8636 - 1.0456*z^(-1)
% az2 = 1.0000 - 1.7769*z^(-1) + 0.8033*z^(-2)

% za výraz z^(-1) dosadíme:
% z^(-1) = -(z^(-2)-beta1*z^(-1)+beta2)/(beta2*z^(-2)-beta1*z^(-1)+1)

%-----
% přenosová funkce má tvar:
%
% -2.846+4.3322*z^(-2)-1.6356*z^(-4)    -2.997--4.64*z^(-2)-4.8092*z^(-4)
% ----- + -----
% 0.124-0.1086*z^(-2)+0.0963*z^(-4)    0.0264-0.0531*z^(-2)-1.9736*z^(-4)
%
%-----

bz1_PP = [-2.84596 0 4.33221 0 -1.635649];
az1_PP = [0.124028 0 -0.108642 0 0.0963];

bz2_PP = [2.99711 0 -4.639875 0 1.786799];
az2_PP = [0.079143 0 8.378e-3 0 0.017523];

[h1,w]= freqz(bz1_PP,az1_PP,N,fvz);
[h2,w]= freqz(bz2_PP,az2_PP,N,fvz);
h = h1 + h2;
figure(5);
subplot(2,1,1);
semilogx(w,abs(h)), grid
title('Chebyshev I n=4 PP metoda imp. invar');
ylabel('|H(w)|');
xlabel('f [Hz]');
subplot(2,1,2);
semilogx(w,angle(h)),grid
xlabel('f [Hz]');
ylabel('faze(w)');

% H(z) = H1(z) + H2(z) - paralelní realizace
% y(n) = y1(n) + y2(n)

```

```

2. % -----
   % Přepočet na pásmovou zadrž
   % -----

Wp = 0.3249;
wd = 0.4*pi;
wh = 0.7*pi;
Wh = tan(wh/2);    % Wh = 1.3764
Wd = tan(wd/2);    % Wd = 0.7265

k = tan((Wh-Wd)/2)*tan(Wp/2);    % k = 0.0552
gama = (cos((wh+wd)/2))/(cos((wh-wd)/2));    % gama = 0
beta1 = (2*gama)/(k+1);    % beta1 = 0
beta2 = (1-k)/(1+k);    % beta2 = 0.8954

% za výraz  $z^{-1}$  dosadíme:
%  $z^{-1} = z^{-2} - \beta_1 z^{-1} + \beta_2$  /  $(\beta_2 z^{-2} - \beta_1 z^{-1} + 1)$ 

% -----
% přenosová funkce má tvar:
%
% 
$$\frac{-2.3457 - 6.4473z^{-2} - 4.38543z^{-4}}{0.1528 + 0.14284z^{-2} + 0.1982z^{-4}} = \frac{2.9274 + 5.035z^{-2} + 2.16137z^{-4}}{0.053 + 0.02784z^{-2} + 0.014z^{-4}}$$

% -----

bz1_PZ = [-2.76405 0 -4.70643 0 -1.99805];
az1_PZ = [0.10743 0 0.157386 0 0.09026];

bz2_PZ = [2.92737 0 5.035 0 2.16137];
az2_PZ = [0.053 0 0.02784 0 0.014];

[h1,w]= freqz(bz1_PZ,az1_PZ,N,fvz);
[h2,w]= freqz(bz2_PZ,az2_PZ,N,fvz);
h = h1 + h2;
figure(6);
subplot(2,1,1);
semilogx(w,abs(h)), grid
title('Chebyshev I n=4 PZ metoda imp. invar');
ylabel('|H(w)|');
xlabel('f [Hz]');
subplot(2,1,2);
semilogx(w,angle(h)),grid
xlabel('f [Hz]');
ylabel('faze(w)');

% H(z) = H1(z) + H2(z) - paralelní realizace
% y(n) = y1(n) + y2(n)

```

Poznámka:

Transformace na HP, PP a PZ se dá provést i v analogovém tvaru, % výsledek se pak převede na digitální tvar

**Text k prostudování**

- [1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005

***Další zdroje, použítá literatura***

- [2] Proakis, J.G., Manolakis, D.G.: Introduction to Digital Signal Processing. Macmillan Publishing Company, New York, 1988 (ISBN 0-02-396815-X)[2])
- [3] Mitra, S.K., Kaiser, J.F.: Digital signal Processing. 1 John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993 (ISBN 0-471-61995-7)
- [4] Uhlíř, J., Sovka, P.: Číslicové zpracování signálů. Vydavatelství ČVUT, Praha 1995, (ISBN 80-01-01303-0)
- [5] Vích, R.: Návrh číslicových filtrů a korektorů útlumu s lineární fází metodou kmitočtového vzorkování. Slaboproudý obzor 42, r. 1981, č. 10, str. 475 – 479
- [6] Lynn, P.A.: On line digital filters for biological signals: Some fast designs for small computer. Med. & Biol. Eng. & Comput., vol.15, 1977
- [7] Jan, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT Brno, 1997, (ISBN 80-214-0816-2)
- [8] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc., 2000 Reference

4. CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH SIGNÁLŮ



Čas ke studiu: 1 hodinu



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy.
- popsat náhodný signál
- vypočítat autokorelační a korelační funkce



Pojmy k zapamatování 4

Střední hodnota, rozptyl, střední kvadratická hodnota, medián, autokorelační funkce a vzájemná korelační funkce.



Výklad

Biologické záznamy patří do skupiny náhodných dat. Tyto nemohou být vyjádřeny explicitními matematickými vztahy. Náhodná data jsou popsána statistickými termíny (pravděpodobnostní rozložení, momenty druhých a vyšších řádů). Charakteristiky náhodných procesů jsou obecně určovány pro časové okamžiky ze všech realizací souboru („napříč souborem“) [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. V praxi máme k dispozici pouze jediný záznam. Proto jeho charakteristiky určujeme přes časový interval a ne napříč souborem. Náhodný proces je matematický model. Použitím tohoto modelu můžeme popsat jisté průměrné vlastnosti dat matematickými termíny postavenými na statistické teorii [3], [4], [8]. V této kapitole budou definovány základní pojmy, které budou v další části používány.

Mezi nejpoužívanější charakteristiky patří: střední hodnota, rozptyl, střední kvadratická hodnota, medián, autokorelační funkce a vzájemná korelační funkce. Pro stacionární ergodický proces jsou definovány takto:

Odhad střední hodnoty:

$$\mu_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \quad (4.1)$$

kde N je počet vzorků, $x(n)$ jsou jednotlivé vzorky realizace diskrétního signálu a index n udává pořadí vzorku $x(n)$

rozptyl :

vychýlený odhad rozptylu:

$$\sigma_x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x(n) - \mu_x]^2 \quad (4.2)$$

nestranný odhad rozptylu:

$$s_x^2(n) = \frac{N}{N-1} \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [x(n) - \mu_x]^2 \quad (4.3)$$

střední kvadratická hodnota signálu :

$$\Psi_x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(n) = \sigma_x^2(n) + \mu_x^2(n) \quad (4.4)$$

medián :

Pro n liché platí :

$$\tilde{x} = x(k) \quad , \quad \text{kde } k = \frac{n+1}{2} \quad (4.5)$$

Je-li n sudé, pak :

$$\tilde{x} = \frac{x(k) + x(k+1)}{2} \quad , \quad \text{kde } k = \frac{n}{2} \quad (4.6)$$

Medián $\tilde{x}$ je ukazatel polohy. Je to vlastně „prostřední (centrální)“ hodnota posloupnosti $x(n)$ uspořádané podle velikosti.

autokorelační funkce

stacionárního procesu je definována pro dva časové okamžiky. Pro diskrétní posloupnost jsou definovány vztahy :
nestranný odhad

$$R_{xx}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n)x(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (4.7)$$

vychýlený odhad

$$R_{xx}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n)x(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (4.8)$$

kde L je zvolené maximální zpoždění.

diskrétní vzájemná korelace

signálu $x(n)$ a $y(n)$ lze odhadnout podle vztahů :

$$R_{xy}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n)y(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (4.9)$$

nebo

$$R_{yx}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} y(n)x(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (4.10)$$

kde L je zvolené maximální zpoždění.

lineární regrese

vychází z metody nejmenších čtverců. Regresní rovnice je analytickým vyjádřením vztahů mezi proměnnými $x(n)$ a $y(n)$ – viz obr. 16. Získaná přímka optimálně prokládá soustavu bodů – regresní přímka (vztahová přímka) :

$$y(n) = a_0 + a_1 x(n) \quad (4.11)$$

kde

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4.12)$$

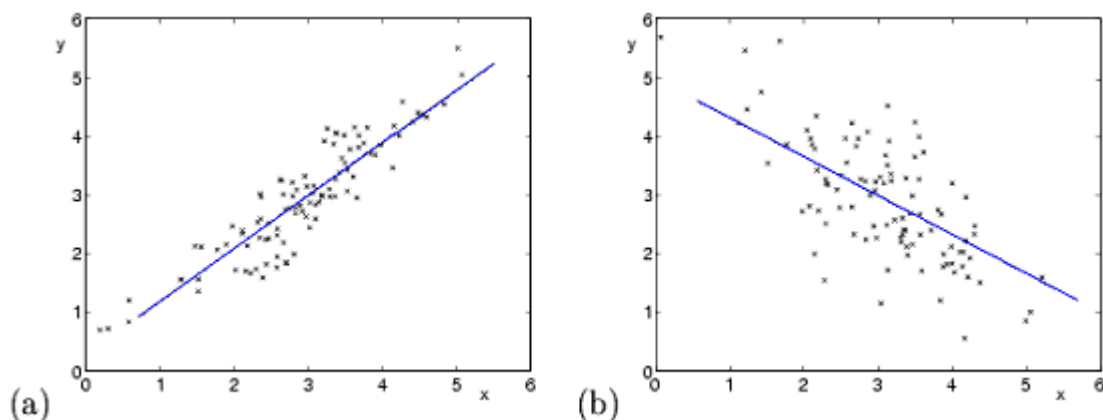
$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4.13)$$

n je počet bodů.

lineární korelace

$$r_{xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \cdot \left[n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}, \quad (5.14)$$

Korelačním koeficientem r_{xy} měříme stupeň těsnosti závislosti neboli spolehlivost regresního odhadu. Koeficient r_{xy} leží v intervalu $<-1, 1>$. Co do absolutní hodnoty je považován korelační vztah za málo těsný, je-li korelační koeficient menší než 0,3. Za velmi těsný, je-li větší než 0,8. Pohybuje-li se korelační koeficient v tomto rozmezí, je korelační závislost středně těsná.

Obr. 16: Příklad regresní přímky a) $y = 0,9003x + 0,2901$ b) $y = -0,6629x + 4,9804$ **Řešený příklad 4.1***Procvičte si příkazy z MATLABu:***1) Autokorelace****% a) Autokorelace**

```
figure(1);
subplot(2,1,1);

x=[1 2 4 8 16 32 16 0 -8 1];
delka=length(x);
Rxx=xcorr(x); % autokorelace
i=-9:1:9;
stem(i,Rxx)
title('Rxx v casove oblasti');
hold on
plot(i,Rxx,'g');
hold off
```

2) Vzájemná korelace**a) Rxy**

```
figure(2)
subplot(2,1,1)
y=10:-1:1;
Rxy=xcorr(y,x); % vzajemna korelace
ix=length(x);
iy=length(y);
i=-(iy-1):(iy-1);
stem(i,Rxy)
title('Rxy'), hold on
plot(i,Rxy,'g');
hold off
```

% b) Autokorelace pomoci konvoluce

```
subplot(2,1,2)
z=fliplr(x); % zamena poradi prvku
vektoru
Rxy=conv(x,z);
stem(Rxx)
title('Rxx(n)=x(n)*x(-n) ');
hold on
plot(Rxy,'g');
hold off
pause
```

%b) Ryx

```
subplot(2,1,2)
Ryx=xcorr(x,y);
stem(i,Ryx)
title('Ryx');
hold on
plot(i,Ryx,'g');
hold off
pause
```

3) Autokorelace periodického signálu

```
figure(3)
subplot(3,1,1);
x=[x zeros(1,30) x zeros(1,30) x zeros(1,30) x zeros(1,30)];
x=[x x];
plot(x)
title('1.x; 2.Rxx(aperiodicka); 3.Rxx(periodicka)');
subplot(3,1,2);
Rxx=xcorr(x);
plot(Rxx)
hold on
plot(Rxx,'g');
hold off
```

4) Autokorelace pomocí spektrum

```
xx=[x x];
X=fft(xx);
XX=conj(X);
RXX=X.*XX;
Rxx=real(ifft(RXX));
subplot(3,1,3);
plot(Rxx)
pause
```

5) Detekce signálu pomocí korelačních technik

% a) šum s normálním rozdělením

```
figure(4)

subplot(3,1,1)
% generov. nahod.posl.s normalnim rozdelenim:
% stredni hodnota=0.0, rozptyl=1.0
n=randn(1,length(x));
plot(n)
subplot(3,1,2)
hist(n); %zobrazeni histogramu
subplot(3,1,3)

Rnn=xcorr(n);
plot(Rnn);
pause
```

% b) zašuměný signál

$$y = x + n;$$

```
x=x/8; % jednod. volba pomeru
% signal/sum
```

```
y=x+n;
figure(5)
subplot(3,1,1)
plot(y);
hold on
plot(x-10,'r');
hold off
title('1.x a y=x+noise; 2.Ryy;
3.Rxy');
subplot(3,1,2)
kor=xcorr(y);
plot(kor(length(x):2*length(x)-1))
subplot(3,1,3)
koryx=xcorr(y,x);
plot(koryx(length(x):2*length(x)-1));
```

```
rovnom=round(50*(rand(1,500)-0.5)+50);
normal=round(10*randn(1,500)+10);
```

```
% rovn. rozdeleni 25-75, str. hodn. 50
% normal. rozdeleni, str. hodn. 10, rozptyl 10
```

```
figure(1);
subplot(2,1,1);
[PR,idxr]=hist(rovnom,[min(rovnom):max(rovnom)]); % PR - cetnost; idxr - hodnoty
% vzorku
```

```

PR=PR/length(rovnom);
bar(idxr,PR);
title('Rovnomerne rozdeleni pravdepodobnosti');

subplot(2,1,2);
[PG,idxg]=hist(normal,[min(normal):max(normal)]);
PG=PG/length(normal);
bar(idxg,PG);
title('Normalni rozdeleni pravdepodobnosti');

FR=[];
FG=[];
for i=1:length(idxr),
    FR=[FR sum(PR(1:i))];
end;
for i=1:length(idxg),
    FG=[FG sum(PG(1:i))];
end;
pause
figure(2);
subplot(2,1,1);
bar(idxr,FR);
title('Distribucni fce pro rovnomerne rozdeleni pravdepodobnosti');
subplot(2,1,2);
bar(idxg,FG);
title('Distribucni fce pro normalni rozdeleni pravdepodobnosti');

% Stredni hodnota:
avg1=sum(normal)/length(normal);    % zprumerovany signal
avg2=idxg*PG;                        % z rozdeleni pravdepodobnosti
avg3=mean(normal);                   % vypocet Matlabu

% Disperze (rozptyl):
disp1=sum((normal-avg1).^2)/length(normal); % pomoci zprumerovani signalu
disp2=((idxg-avg2).^2)*PG;              % z rozdeleni pravdepodobnosti

%Smerodatna odchylka:
smo1=sqrt(disp1);                    % pomoci zprumerovani signalu
smo2=sqrt(disp2);                    % z rozdeleni pravdepodobnosti
smo3=std(normal);                    % vypocet Matlabu
pause

%Zobrazeni
figure(3);
clg;
axis off;
text(0.1,'Střední hodnoty:'); text(0.1,0.9,['zprumerovanim signalu: ' num2str(avg1)]);
text(0.1,0.85,['z rozdeleni pravd.: ' num2str(avg2)]); text(0.1,0.8,['vypocet Matlabu: ' num2str(avg3)]);
text(0.7,'Disperze (rozptyl):');
text(0.1,0.6,['zprumerovanim signalu: ' num2str(disp1)]);
text(0.1,0.55,['z rozdeleni pravd.: ' num2str(disp2)]);
text(0.45,'Smerodatna odchylka:');
text(0.1,0.35,['zprumerovanim signalu: ' num2str(smo1)]);
text(0.1,0.3,['z rozdeleni pravd.: ' num2str(smo2)]);

```

```

text(0.1,0.25,['vypocet Matlabu: ' num2str(smo3)]);
pause

ACF1 = xcorr(acf1,'biased');

ACF1 = ifft(acf1);
subplot(2,1,1);
t1 =(1:128)/128-1;
t2 =(129:256)/128-1;
plot(t1,abs(ACF1(129:256)),t2,abs(ACF1(1:128)),'R'), grid
xlabel('t ( s ) ');
ylabel('ACF');
title('Autokorelační funkce);           % 2 sec. záznamu - 256 vzorků;

```



Řešený příklad 4.2

Jsou dány posloupnosti : $x = \{ 2, -1, 3, 7, 1, 2, -3, 0 \}$,

$y = \{ 1, -1, 2, -2, 4, 1, -2, 5 \}$.

a) Určete výpočtem $R_{xx}(n)$ a $R_{xy}(n)$

b) Graficky jej znázorněte

☑ Řešení :

$$r_{xx}(0) = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) = 77$$

$$r_{xx}(1) = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = 19$$

$$r_{xx}(2) = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 = 13$$

⋮

$$r_{xx}(-1) = 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 19$$

$$r_{xx}(2) = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 = 13$$

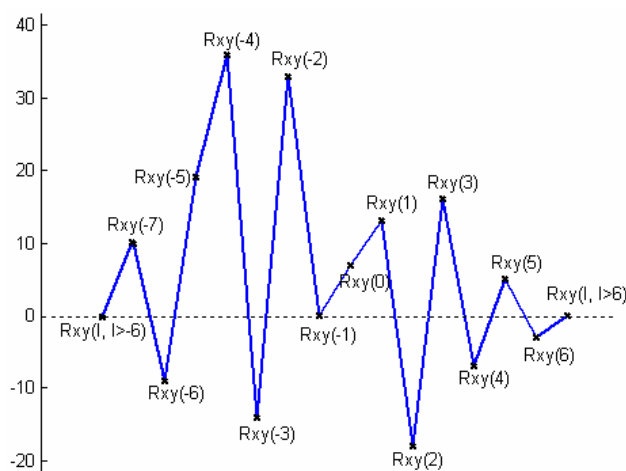
⋮

$$R_{xx}(l) = \{ 0, -6, 7, -9, -2, 13, 19, 77, 19, 13, -2, -9, 7, -6 \}$$

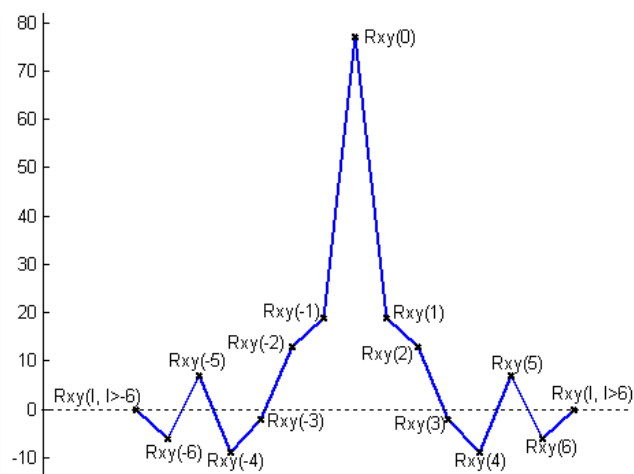
Obdobně

$$R_{xy}(l) = \{ 10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, 7, 13, -18, 16, -7, 5, -3 \}$$

Vzájemná korelační funkce



Autokorelační funkce



Otázky

1. Jak určíme autokorelační funkci?
2. Jak určíme vzájemnou korelační funkci?
3. Co je to medián?



Úlohy k řešení

1. Jsou dány posloupnosti : $x = \{ 4, 2, -1, 3, -2, -6, -5, 4, 5 \}$,
a. $y = \{ 7, 4, -2, -8, -2, 1, 0, 0, 0 \}$.
2. Určete výpočtem $R_{xx}(n)$ a $R_{xy}(n)$. Výpočet ověřte v MATLABu.
3. Jsou dány posloupnosti : $x = \{ 1, 0, 0, 1 \}$, $y = \{ 0.5, 1, 1, 0.5 \}$. Určete $R_{xx}(n)$ a $R_{xy}(n)$ algoritmem FFT. Výpočet ověřte v MATLABu.



Klíč k řešení

1. $R_{xx}(l) = \{ 20, 26, -17, -23, -13, -39, -53, 39, 136, 39, -53, -39, -13, -23, -17, 26, 20 \}$
 $R_{xy}(l) = \{ 0, 0, 0, 4, -6, -37, -19, 12, 12, 27, 71, 62, -70, -110, -29, 48, 35 \}$
2. $R_{xx}(l) = \{ 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1 \}$
 $R_{xy}(l) = \{ 0.5, 1, 1, 1, 1, 1, 0.5, 35 \}$



Text k prostudování

[1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005



Další zdroje, použítá literatura

- [2] Proakis, J.G., Manolakis, D.G.: Introduction to Digital Signal Processing. Macmillan Publishing Company, New York, 1988 (ISBN 0-02-396815-X)[2])
- [3] Mitra, S.K., Kaiser, J.F.: Digital signal Processing. 1 John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993 (ISBN 0-471-61995-7)
- [4] Uhlíř, J., Sovka, P.: Číslicové zpracování signálů. Vydavatelství ČVUT, Praha 1995, (ISBN 80-01-01303-0)
- [5] Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. SNTL, Praha 1976
- [6] Vích, R.: Návrh číslicových filtrů a korektorů útlumu s lineární fází metodou kmitočtového vzorkování. Slaboproudý obzor 42, r. 1981, č. 10, str. 475 – 479
- [7] Lynn, P.A.: On line digital filters for biological signals: Some fast designs for small computer. Med. & Biol. Eng. & Comput., vol.15, 1977
- [8] Jan, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT Brno, 1997, (ISBN 80-214-0816-2)
- [9] Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky. SNTL, Praha, 1989
- [2] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc., 2000 Reference

5. SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA BIOLOGICKÉHO SIGNÁLU



Čas ke studiu: 3 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy
- popsat metody frekvenční analýzy
- vypočítat přímou i zpětnou DFT a FFT, spektrální výkonovou hustotu, koherenci, autokorelační a korelační funkce – křížové spektrum, určit časové zpoždění mezi dvěma kanály
- určit modely spektrální výkonové hustoty – AR, MA ARMA



Pojmy k zapamatování 5

Spektrální analýza – parametrické (model AR, MA, ARMA) a neparametrické metody – DFT, FFT, spektrální výkonová hustota, autokorelace, vzájemná korelace, koherence, časové zpoždění.



Výklad

Biologické záznamy jsou pokládány za časové řady. K analýze časových řad byly vyvinuty různé metody. Frekvenční (spektrální) analýza je jedním z nejdůležitějších diagnostických nástrojů neboť lékař posuzuje frekvenční složky, které jsou v záznamu obsaženy.

Metody frekvenční analýzy můžeme rozdělit do dvou základních kategorií:

- 1) neparametrické metody
- 2) parametrické metody

ad 1) Neparametrické metody patří k metodám, které lze použít pro libovolné signály – na modelové zpracování signálů nejsou totiž kladeny speciální požadavky, signál je zpracováván přímo. Metody zahrnují: filtrování, spektrální analýzu, korelační analýzu.

ad 2) Parametrické metody vyžadují stanovení řady parametrů, které by vyhovovaly danému speciálnímu matematickému modelu pro zpracováváný signál. Analýza signálu spočívá v odhadu těchto parametrů ze zaznamenaných dat. Nejznámější modely dat jsou: autoregresní model (AR), model klouzavých průměrů (MA), autoregresní model klouzavých průměrů (ARMA).

5.1. Neparametrické metody – Fast Fourier Transform

Fourierova transformace je jeden ze základních algoritmů číslicového zpracování signálu. Patří mezi ortogonální transformace

Přímá Fourierova Transformace (DFT – [5], [6], [11], [15], [21], [23] a [37]), vzorkovaná v n bodech $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, je definována

$$X(k) = X(nT) = X\left(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

Předpokládáme, že $T = 1$, pokud není uvedeno jinak

Tato rovnice definuje algoritmus, který vezme pole N komplexních čísel (případně pole N reálných čísel a N imaginárních čísel) a vrací pole N komplexních čísel.

Inverzní DFT je definována

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

Přímý výpočet DFT znamená N^2 operací. FFT algoritmus vyžaduje $(N \cdot \log N)$ operací, je-li N mocninou 2.



Řešený příklad 5.1

Určete a) DFT posloupnosti $\{1, 0, 0, 1\}$

b) Nakreslete modulové (amplitudové) a fázové spektrum

c) Nakreslete amplitudové fázové spektrum je-li vzorkovací kmitočet $f_{vz} = 8 \text{ kHz}$

Řešení :

Pozn.: řešte v radiánech

a) Vyjdeme ze vztahu (5.1):

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\} = \{1, 0, 0, 1\}; \quad k = 0, \dots, N-1 \Rightarrow k = 3; N = 4$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \Rightarrow$$

$$k = 0$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x_n e^{-j\frac{2\pi 0n}{4}} = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

$$k = 1$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot n}{N}} = x(0) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 0}{4}} + x(1) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 1}{4}} + x(2) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 2}{4}} + x(3) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 3}{4}} =$$

$$= 1 + 0 + 0 + 1 \cdot e^{-j \frac{3\pi}{2}} = 1 + \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right] = 1 + j$$

$$\varphi(\Omega) = \arctg \frac{\text{Imag}}{\text{Real}} = \arctg 1 \Rightarrow 45^\circ$$

$k = 2$

$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 2n}{N}} = x(0) \cdot e^{-j \frac{4\pi \cdot 0}{4}} + x(1) \cdot e^{-j \frac{4\pi \cdot 1}{4}} + x(2) \cdot e^{-j \frac{4\pi \cdot 2}{4}} + x(3) \cdot e^{-j \frac{4\pi \cdot 3}{4}} =$$

$$= 1 + 0 + 0 + 1 \cdot e^{-j 3\pi} = 1 + [\cos(-3\pi) + j \sin(-3\pi)] = 0$$

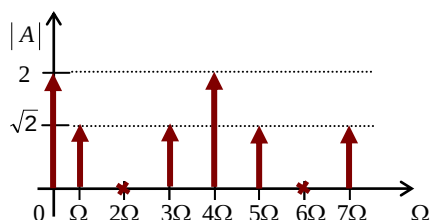
$$\varphi(\Omega) \Rightarrow 0^\circ$$

Obdobně obdržíme pro $k = 3$

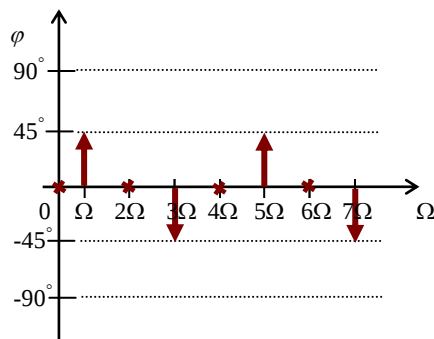
$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x_n \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot 3n}{N}} = 1 - j$$

$$\varphi(\Omega) = \arctg(-1) \Rightarrow -45^\circ$$

b) amplitudové spektrum:



fázové spektrum:



c) Tvar amplitudového a fázového spektra se nezmění, určíme pouze hodnoty Ω

$$\Omega = \frac{2\pi}{N \cdot T} \quad \text{kde} \quad T = \frac{1}{f_{vz}} = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125 \mu s \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{N \cdot T} = \frac{2\pi}{4 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = 12,57 \text{ kHz}$$

$$\Omega \quad 12,57 \text{ kHz}$$

$$2\Omega \quad 25,14 \text{ kHz}$$

$$3\Omega \quad 37,71 \text{ kHz}$$

$\vdots$

$\vdots$



Řešený příklad 5.2

Určete zpětnou diskretní Fourierovu transformaci pro DFT: $\{2, 1+j, 0, 1-j\}$

✓ Řešení :

Vyjdeme ze vztahu (5.2):

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \Rightarrow N=4; k=0, \dots, 3; n=4$$

$n=0$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \Rightarrow \\ x(0) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi k0}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \{X(0) + X(1) + X(2) + X(3)\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \{2 + (1+j) + 0 + (1-j)\} = 1 \end{aligned}$$

$n=1$

$$\begin{aligned} x(1) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi k1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \left\{ X(0) \cdot e^{j0} + X(1) \cdot e^{j \frac{\pi}{2}} + X(2) \cdot e^{j\pi} + X(3) \cdot e^{j \frac{3\pi}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ 2 + \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{j \frac{\pi}{2}} + 0 + \sqrt{2} \cdot e^{-j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{j \frac{3\pi}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ 2 + \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{3\pi}{4}} + 0 + \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{5\pi}{4}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$n=2$

$$\begin{aligned} x(2) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi k2}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \left\{ X(0) \cdot e^{j0} + X(1) \cdot e^{j \frac{4\pi}{4}} + X(2) \cdot e^{j \frac{6\pi}{4}} + X(3) \cdot e^{j \frac{12\pi}{4}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ 2 + \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\pi} + 0 + \sqrt{2} \cdot e^{-j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{j3\pi} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ 2 + \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{5\pi}{4}} + 0 + \sqrt{2} \cdot e^{j \frac{11\pi}{4}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Obdobně obdržíme pro $n=3$

$$x(3) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) \cdot e^{j \frac{2\pi k3}{4}} = 1$$

□ **Algoritmus “Decimace v čase” (Cooley, Tukey 1965)**

1. Začneme s plnou transformací

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.3)$$

$$e^{-j \frac{2\pi}{N}} = W_N$$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.4)$$

Pozn.

$$\left. \begin{aligned} W_N^2 &= \left(e^{-j2\pi/N} \right)^2 = e^{-j2\pi \cdot 2/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2} \\ W_N^{(k+N/2)} &= W_N^k \cdot W_N^{N/2} = W_N^k \cdot e^{-j(2\pi/N)(N/2)} = W_N^k \cdot e^{-j\pi} = -W_N^k \\ W_N &= e^{-j2\pi/N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$W_N^2 = W_{N/2} \quad (5.5)$$

$$W_N^{(k+n/2)} = -W_N^k$$

2. Rozepíšeme $X_1(k)$ jako součet sudých a lichých členů

$$X_1(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \cdot W_N^{2nk}}_{\text{sudá posloupnost}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \cdot W_N^{(2n+1)k}}_{\text{lichá posloupnost}}$$

sudá posloupnost – $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-1}$,

lichá posloupnost – $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N-1}$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \cdot W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \cdot W_N^{2nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X_1(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.6)$$

Originální Fourierova transformace byla přepsána pomocí dvou FT operujících na lichých a sudých složkách dat. V této rekursi lze pokračovat až do triviálního případu jednoho bodu.

Poznámka:

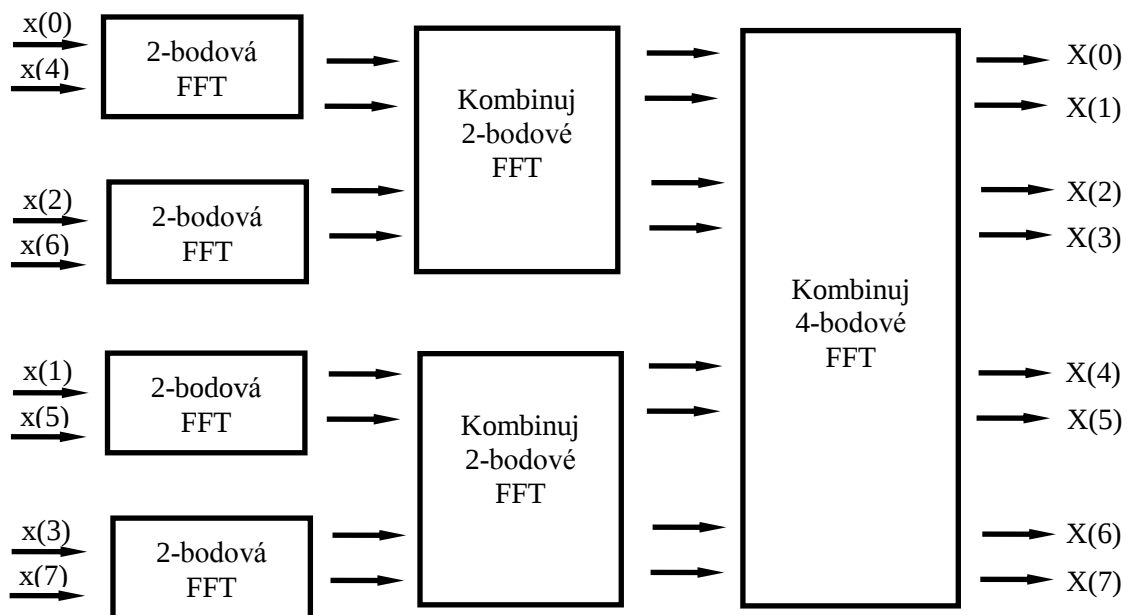
Odvození:

$$\begin{aligned}
 X_1(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \cdot e^{-j\frac{2\pi(2n)k}{N}} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \cdot e^{-j\frac{2\pi(2n+1)k}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \cdot e^{-j\frac{2\pi(2n)k}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \cdot e^{-j\frac{2\pi(2n)k}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N/2}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N/2}} \\
 &= X_{11}(k) + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \cdot X_{12}(k)
 \end{aligned}$$

Výpočetní náročnosti

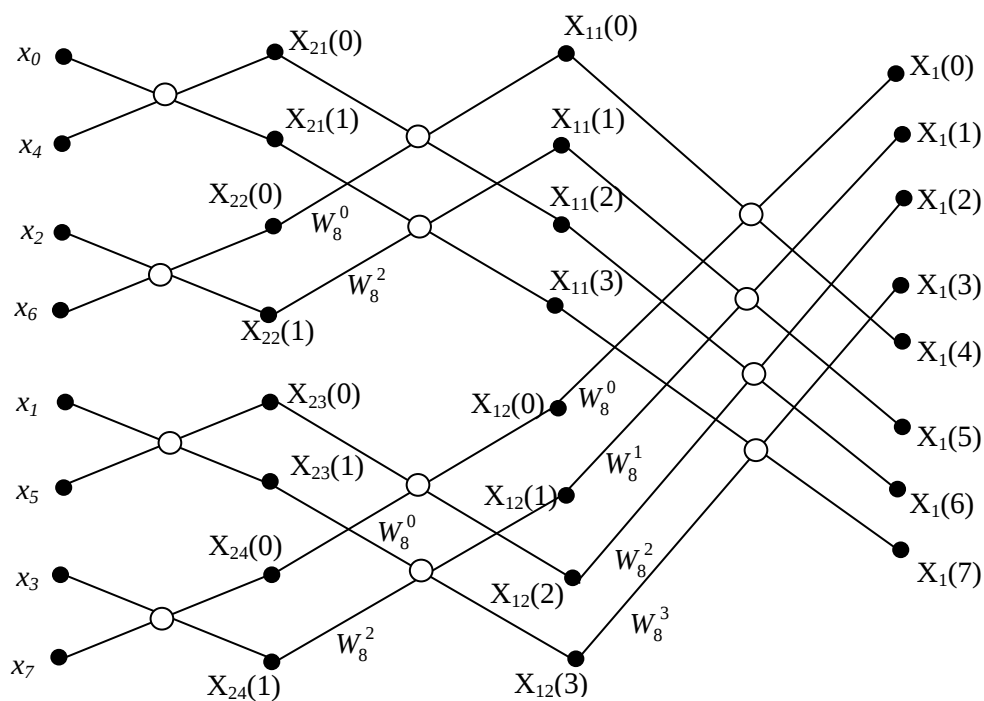
Počet bodů	Přímý výpočet <i>Komplexní násobení</i>	FFT <i>Komplexní násobení</i>	Zrychlení
N	N ²	(N/2)log ₂ N	
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64.0
512	262144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8

Příklad pro $N = 8$ bodů DFT:



Obr. 17: Blokový diagram výpočtu FFT pro 8 bodů

FFT - motýlek



Obr. 18: Schéma výpočtu FFT pro 8 vzorků (rozkreslení obr. 15). $W_N = e^{j2\pi/N}$.

**Řešený příklad 5.3**

Napište strukturu výpočtu 8-bodové FFT posloupnosti A_0 pomocí algoritmu decimace v čase.
Posloupnost $A_0 : \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

Řešení :

8-bodová DFT z $A_0 : X_1(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k)$, kde $k = 0, \dots, N-1; N = 0, \dots, 7$

Posloupnost A_0 rozdělíme na: sudou A_1 a lichou A_2 :

$$A_1 : x_0, x_2, x_4, x_6 \quad A_2 : x_1, x_3, x_5, x_7 \quad N=0, \dots, 3$$

4-bodová DFT z $A_1 : X_{11}(k) = X_{21}(k) + W_{N/2}^k X_{22}(k)$

$$A_2 : X_{12}(k) = X_{23}(k) + W_{N/2}^k X_{24}(k), \quad \text{kde } k = 0, \dots, (N/2)-1 \\ N = 0, \dots, 3$$

4-bodové posloupnosti A_1 a A_2 rozdělíme opět na: sudé A_3, A_5 a liché A_4, A_6 :

$$A_3 : x_0, x_4 \quad A_5 : x_2, x_6 \quad A_4 : x_1, x_5 \quad A_6 : x_3, x_7 \quad N=0, 1$$

2-bodové DFT z $A_3 : X_{21}(k) = x_0 + W_{N/4}^k x_4$

$$A_4 : X_{22}(k) = x_1 + W_{N/4}^k x_5$$

$$A_5 : X_{23}(k) = x_2 + W_{N/4}^k x_6$$

$$A_6 : X_{24}(k) = x_3 + W_{N/4}^k x_7, \quad \text{kde } k = N = 0, 1$$

**Řešený příklad 5.4**

Ověřte pomocí algoritmu decimace v čase, že FFT posloupnosti A_0 je $\{4, 0, 2+2j, 0, 0, 0, 2-2j, 0\}$.

Posloupnost A_0 nabývá hodnot: $\{1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1\}$

Řešení :

Vyjdeme z příkladu 5.2:

Určíme 2-bodové DFT ze sudých A_3, A_5 a lichých A_4, A_6 posloupností:

$$A_3 : X_{21}(k) = x_0 + W_{N/4}^k x_4$$

$$k = 0, 1$$

$$X_{21}(0) = x_0 + W_{N/4}^0 \cdot x_4 = x_0 + x_4 = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} X_{21}(1) &= x_0 + W_{N/4}^1 \cdot x_4 = x_0 + e^{-j \frac{2\pi}{N/4}} \cdot x_4 = x_0 + e^{-j\pi} \cdot x_4 \\ &= x_0 + x_4 \cdot [\cos(-\pi) + j \sin(-\pi)] = x_0 - x_4 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Obdobně: A_4, A_5, A_6

$$X_{22}(0) = x_0 + x_6 = 0$$

$$X_{22}(1) = x_0 - x_6 = 0$$

$$X_{23}(0) = x_1 + x_5 = 0$$

$$X_{23}(1) = x_0 - x_6 = 0$$

$$X_{24}(0) = x_3 + x_7 = 0$$

$$X_{24}(0) = x_3 - x_7 = 0$$

Nyní určíme 4-bodové DFT $A_1: X_{11}(k) = X_{21}(k) + W_{N/2}^k X_{22}(k)$

$$A_2: X_{12}(k) = X_{23}(k) + W_{N/2}^k X_{24}(k)$$

kde $k = 0, \dots, (N/2) - 1, N = 0, \dots, 3$

$k = 0$

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + W_{N/2}^0 X_{22}(0) = 2 + 0 = 2$$

$k = 1$

$$X_{11}(1) = X_{21}(1) + W_{N/2}^1 X_{22}(1) = X_{21}(1) + e^{-j \frac{2\pi}{8/2}} \cdot X_{22}(1) = 0$$

$k = 2$

$$X_{11}(2) = X_{21}(2) + W_{N/2}^2 X_{22}(2) = X_{21}(2) + e^{-j 2 \cdot \frac{2\pi}{8/2}} \cdot X_{22}(2) = X_{21}(2) + e^{-j 2\pi} \cdot X_{22}(2)$$

$$X_{11}(2) = X_{21}(2) - X_{22}(2)$$

Nyní musíme určit hodnotu $X_{21}(2)$ a $X_{22}(2)$

$$X_{21}(2) = x_0 + W_{N/4}^2 \cdot x_4 = x_0 + x_4 = 1 + 1 = 2$$

$$X_{22}(2) = x_0 + W_{N/4}^2 \cdot x_4 = x_0 + x_4 = 1 + 1 = 2$$

takže pro $k = 2$ je

$$X_{11}(2) = X_{21}(2) - X_{22}(2) = 2 - 2 = 0$$

$$k = 3$$

$$X_{11}(3) = X_{21}(3) + W_{N/2}^3 X_{22}(3) = X_{21}(3) + e^{-j3 \cdot \frac{2\pi}{8/2}} \cdot X_{22}(3)$$

$$X_{21}(3) = x_0 + W_{N/4}^3 \cdot x_4 = x_0 - x_4 = 0$$

$$X_{22}(3) = x_2 - x_6 = 0$$

$$X_{11}(3) = 0$$

$$\text{Obdobně určíme } X_{12}(k): X_{12}(k) = X_{23}(k) + W_{N/2}^k X_{24}(k)$$

$$k = 0$$

$$X_{12}(0) = X_{23}(0) + W_{N/2}^0 X_{24}(0) = 0$$

$$k = 1$$

$$X_{12}(1) = X_{23}(0) + W_{N/2}^1 X_{24}(1) = 0$$

$$\vdots$$

8-bodová FFT pak je: $X_1(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k)$ opět postupně dosazujeme za k, N

$$k = 0$$

$$X_1(0) = X_{11}(0) + W_N^0 X_{12}(0) = 2 + 2 = 4$$

$$k = 1$$

$$X_1(1) = X_{11}(1) + W_8^1 \cdot X_{12}(1) = X_{11}(1) + e^{-j \frac{2\pi}{8}} \cdot X_{12}(1) = 0$$

$$\vdots$$

5.2. Parametrické metody

□ Přehled modelů dat

- *Vzorkovanou časovou řadu* lze vyjádřit jako

$$x(nT) = x(n) = x_n \quad \text{kde } T \text{ je interval vzorkování} \quad (5.7)$$

Z-transformace je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot z^{-n} \quad (5.8)$$

spektrum je dáno dosazením $z = e^{j\omega t}$

$$X(e^{j\omega t}) = X(\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega t}}$$

- **Autokorelační funkce** stacionárního procesu je definována pro dva časové okamžiky. Pro diskrétní posloupnost jsou definovány vztahy :

nestranný odhad

$$R_{xx}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n) \cdot x(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (5.9)$$

vychýlený odhad

$$R_{xx}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n) \cdot x(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (5.10)$$

kde L je zvolené maximální zpoždění.

Ze statistického hlediska je důležité, aby odhad byl :

- nestranný
- konzistentní

➤ **Diskrétní vzájemná korelace** signálu $x(n)$ a $y(n)$ lze odhadnout podle vztahů :

$$R_{xy}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} x(n) \cdot y(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (5.11)$$

nebo

$$R_{yx}(l) = \frac{1}{N-l} \sum_{n=0}^{N-l-1} y(n) \cdot x(n-l), \quad \text{kde } l = 0, 1, \dots, L \quad (5.12)$$

kde L je zvolené maximální zpoždění.

Tři základní modely dat jsou

- Autoregressive (AR, autoregresní)
- Moving average (MA, klouzavý průměr)
- Autoregressive – moving average (ARMA, autoregresní - klouzavý průměr)

Autoregresní model AR: - určení parametrů AR modelu je lineární úloha. AR model je popsán rovnicí:

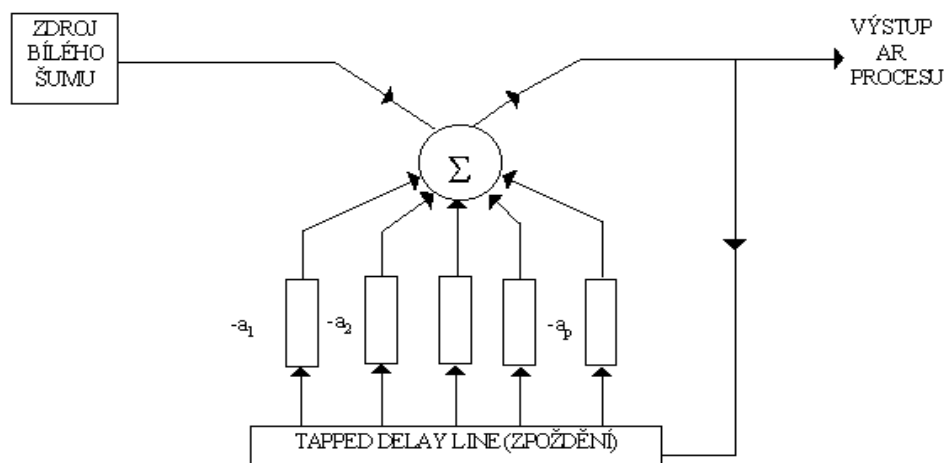
$$x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_p x(n-p) = e(n) \quad (5.13)$$

Diferenciální rovnice modelu je popsána vztahem :

$$X(z) \cdot [1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}] = E(z) \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{A(z^{-1})} \cdot E(z) \quad (5.15)$$

Autoregresní model představuje IIR filtr pouze s póly, p určuje počet minulých hodnot výstupu v rekurzi.



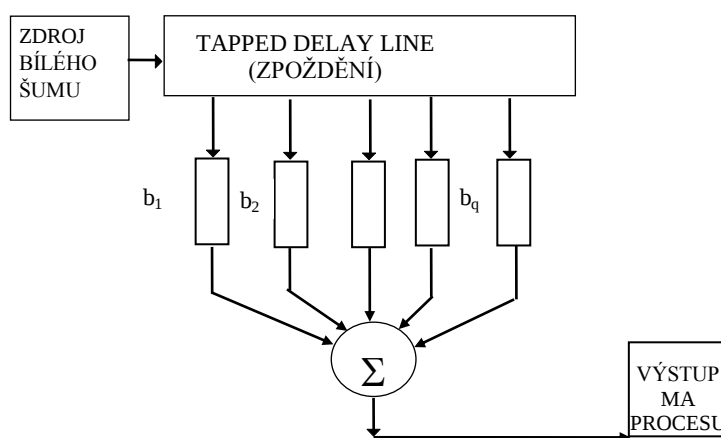
Obr. 19: Autoregressive model

Moving average model - určení parametrů modelu je nelineární úloha. MA model je popsán rovnicí :

$$b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots + b_k x(n-k) = y(n) \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \left(\sum_{i=0}^k b_i z^{-i} \right) \cdot X(z) \quad (5.17)$$

MA model představuje FIR filtr pouze s nulami, k určuje počet minulých hodnot vstupu v rekurzi.

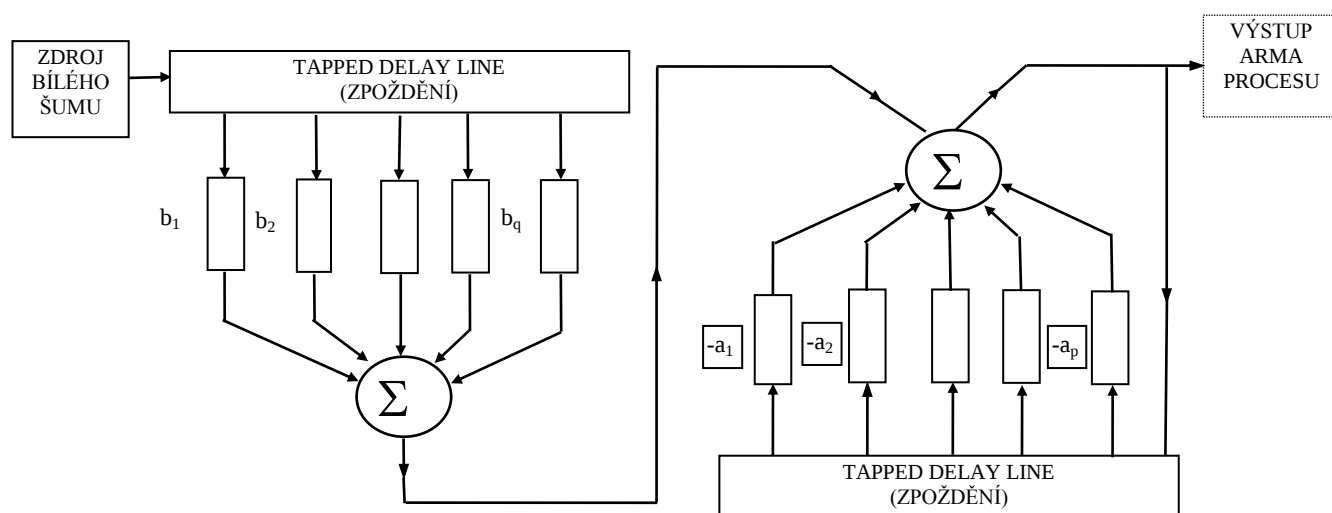


Obr. 20: Moving average model

Autoregresní - moving average model – je nejpřesnější, ale pro určení jeho parametrů je nutné řešit nelineární optimalizační úlohy. ARMA model je popsán rovnicí

$$y(n) = \sum_{i=1}^p a_i y(n-i) + \sum_{j=0}^k b_j x(n-j) \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{\sum_{j=0}^k b_j z^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \cdot X(z) \quad (5.19)$$



Obr. 21: Autoregressive moving average model

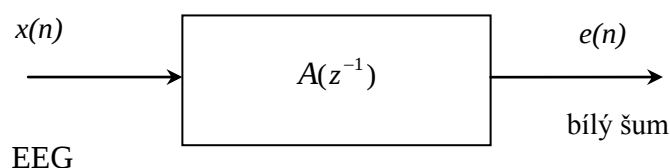
ARMA model představuje IIR filtr s póly i nulovými body.

Všechny tři modely aproximují skutečné spektrum signálu pomocí kvadrátu modulu frekvenční charakteristiky lineárního časově invariantního (LTI) filtru. Volbou řádu filtru (řádu modelu) volíme stupeň aproximace.

Pro AR modely lze úlohu identifikace parametrického modelu interpretovat jako úlohu aproximace spektrální výkonové hustoty signálu metodou nejmenších čtverců pomocí polynomu stupně p . Přitom musí být splněna nerovnost

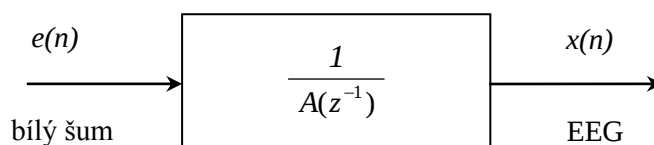
$$1 \leq p \leq N/2 \quad (5.20)$$

Při hledání autoregresního modelu vycházíme z předpokladu, že signál vznikl průchodem bílého šumu přes lineární časově invariantní filtr – obr. 22. Úkolem je určení koeficientů tohoto filtru ze vzorků signálu. Koeficienty filtru parametrizují signál v tom smyslu, že kvadrát amplitudové frekvenční charakteristiky filtru aproximujeme skutečnou spektrální hustotou signálu.



Obr. 22: AR model EEG

Naopak předpokládáme-li, že signál je stacionární, pak jeho průchod filtrem inverzním (k odhadnutému AR filtru) dá bílý šum – obr. 23.



Obr. 23: Inverzní AR filtr

5.3. Modely odhadu spektra

Výkonová spektrální hustota (Power Spectral Density, PSD) stacionárního diskrétního náhodného procesu je vyjádřena Wiener-Chinčinovým teorémem

$$S(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} \quad (5.21)$$

Z této rovnice je vidět, že na PSD lze pohlížet jako na Fourierovu řadu s koeficienty danými autokorelačními koeficienty. Hledaly se modely s konečným počtem para-metrů. Spektrální odhad je proces odhadu parametrů vhodně vybraného modelu – třístupňový postup

1. Výběr modelu, který je dobrou aproximací skutečného procesu
2. Odhad parametrů modelu
3. Výpočet odhadu spektra

□ Lineární predikce

Lineární predikce vychází z autoregresního (AR) modelu signálu

$$x_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + e_n \quad (5.22)$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_p$ reprezentují lineárně predikční (LP, Wienerův) filtr snažící se transformovat vstupní posloupnost do posloupnosti nekorelovaných náhodných veličin.

e_n se v tomto případě nazývá chyba predikce a představuje chybu, které se dopouštíme při odhadu hodnoty x_n z lineární kombinace p minulých vzorků signálu.

Odhad parametrů

Metoda nejmenších čtverců

Za předpokladu, že vstup do systému je neznámý, x_n můžeme přibližně odhadnout z váženého součtu p minulých vzorků (p je řád modelu)

$$\tilde{x}_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (5.23)$$

Vznikne přitom určitá odchylka mezi skutečnou hodnotou x_n a predikovanou hodnotou $\tilde{x}_n$, chyba predikce je

$$e_n = x_n - \tilde{x}_n = x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^p a_k x_{n-k} \quad , \quad a_0 = 1 \quad (5.24)$$

Je-li vzorek x_n časové řady vybrán z náhodného procesu, pak je náhodným procesem i $\{e_n\}$ a v metodě nejmenších čtverců minimalizujeme střední hodnotu čtverce této chyby:

$$P = E[e_n^2] = E \left[\left(x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \right)^2 \right] \quad (5.25)$$

Střední chyba P je minimalizována na základě stacionárních bodů (parciální derivace podle příslušných koeficientů jsou rovny nule):

$$\frac{\partial E[e_n^2]}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (5.26)$$

Získáme tak soustavu lineárních rovnic (normální rovnice, Yule – Walkerovy rovnice)

$$\sum_{k=1}^p a_k \cdot E[x_{n-k} x_{n-i}] = -E[x_n x_{n-i}] \quad (5.27)$$

a minimální střední chyba je

$$\sigma_p^2 = P_p = E[x_n^2] + \sum_{k=1}^p a_k \cdot E[x_n x_{n-k}] \quad (5.28)$$

Pro stacionární případ platí :

$$E[x_{n-k} x_{n-i}] = R(i-k) \quad (5.29)$$

kde $R(i)$ je autokorelační funkce náhodného procesu, která splňuje podmínku

$$R(-i) = R(i)$$

a předpokládáme, že chyba v (5.28) je minimalizována pro nekonečný interval (Autokorelační metoda, koeficienty $R(i-k)$ tvoří autokorelační matici - symetrická Toeplitzova matice). Získáme tak soustavu rovnic :

$$\sum_{k=1}^p a_k \cdot R_{i-k} = -R(i), \quad i = 1, \dots, p \quad (5.30)$$

$$\sigma_p^2 = R(0) + \sum_{k=1}^p a_k \cdot R_k \quad (5.31)$$

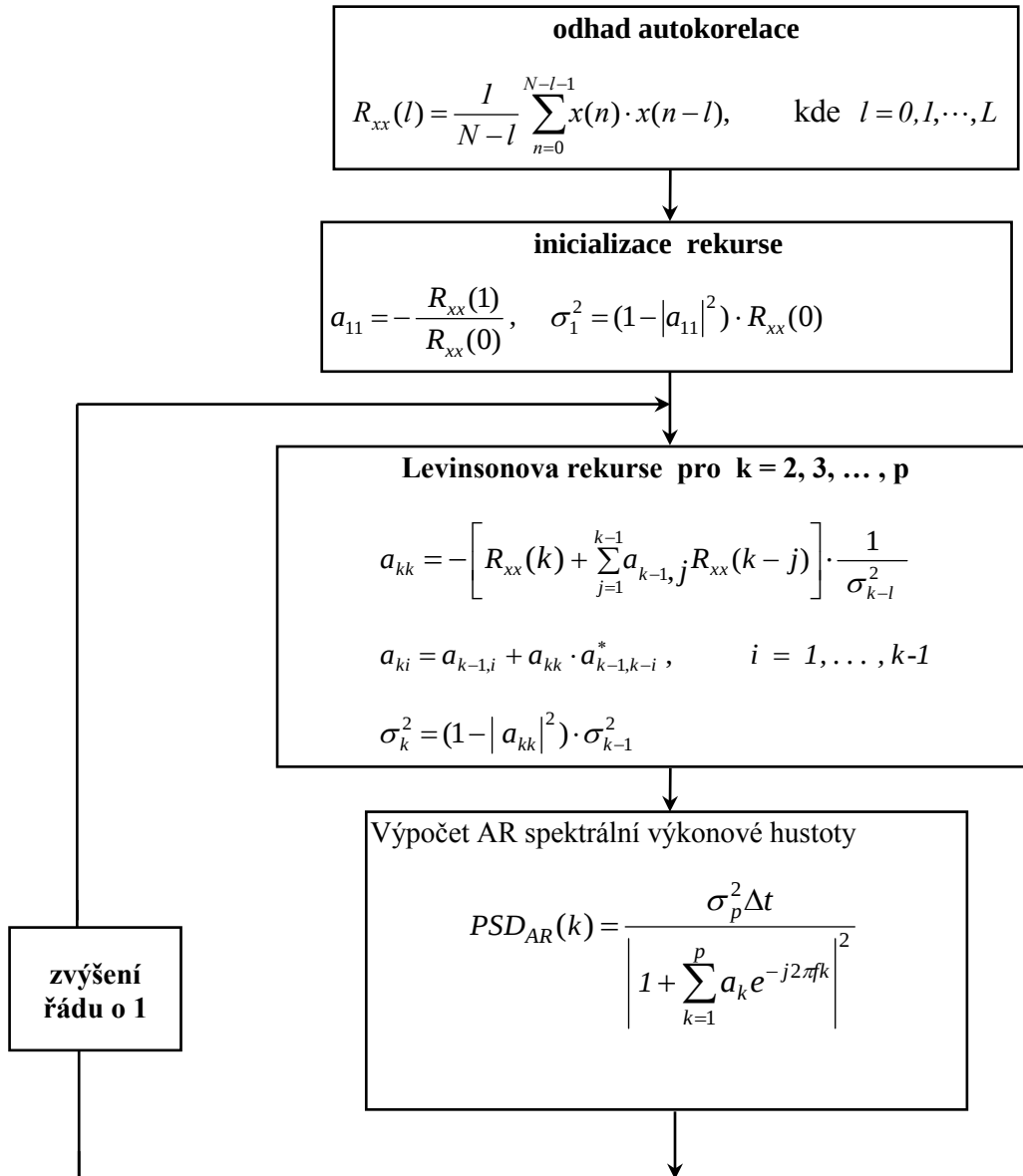
Řešení rovnic (5.30) a (5.31) (např. Gaussovou eliminační metodou) je náročné na počet operací. Proto byly vyvinuty algoritmy, které řeší tuto úlohu efektivněji - např. Levinson-Durbin-Robinsonův algoritmus, Burgův algoritmus.

□ Levinson – Durbin – Robinsonův algoritmus

Levinson – Durbin – Robinsonův algoritmus využívá skutečnosti, že $R(i-k)$ tvoří Toeplitzovu matici autokorelační funkce – viz obr. 24, pro efektivní výpočet spektrální výkonové hustoty. Spektrální výkonovou hustotu (PSD) počítá rekurentně z množiny parametrů $\{a_{11}, \sigma_1\}$, $\{a_{21}, a_{22}, \sigma_2\}$, $\dots$, $\{a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, \sigma_p\}$, kde první index určuje řád iterace. Levinson – Durbin – Robinsonův algoritmus je popsán na obr. 25.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) & R_{xx}(3) & R_{xx}(4) \\ R_{xx}(1) & 1 & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) & R_{xx}(3) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & 1 & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) \\ R_{xx}(3) & R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & 1 & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(4) & R_{xx}(3) & R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & 1 \end{bmatrix}$$

Obr. 24: Toeplitzova matice autokorelační funkce



Obr. 25: Levinson – Durbin – Robinson algoritmus

Při použití AR modelu je nejdůležitější správné stanovení řádu p modelu. Je-li řád modelu příliš nízký, je spektrální výkonová hustota $PSD_{AR}(k)$ příliš vyhlazená. Naopak, je-li p příliš vysoké, mohou se ve spektru $PSD_{AR}(k)$ vyskytnout další chybné vrcholy spektrální výkonové hustoty s nižší amplitudou. Pro výběr optimálního řádu AR modelu bylo stanoveno Akaikem několik kritérií [5], [6], [13], [25], [26]. Kritéria jsou založena na minimalizaci chyby predikce metodou nejmenších čtverců. Hodnota kritéria se počítá vždy po jednom kroku predikce.

➤ **Kritérium FPE** (final prediction error)

$$FPE(p) = \frac{N + p + 1}{N - p - 1} \cdot \sigma_p^2 \quad (5.32)$$

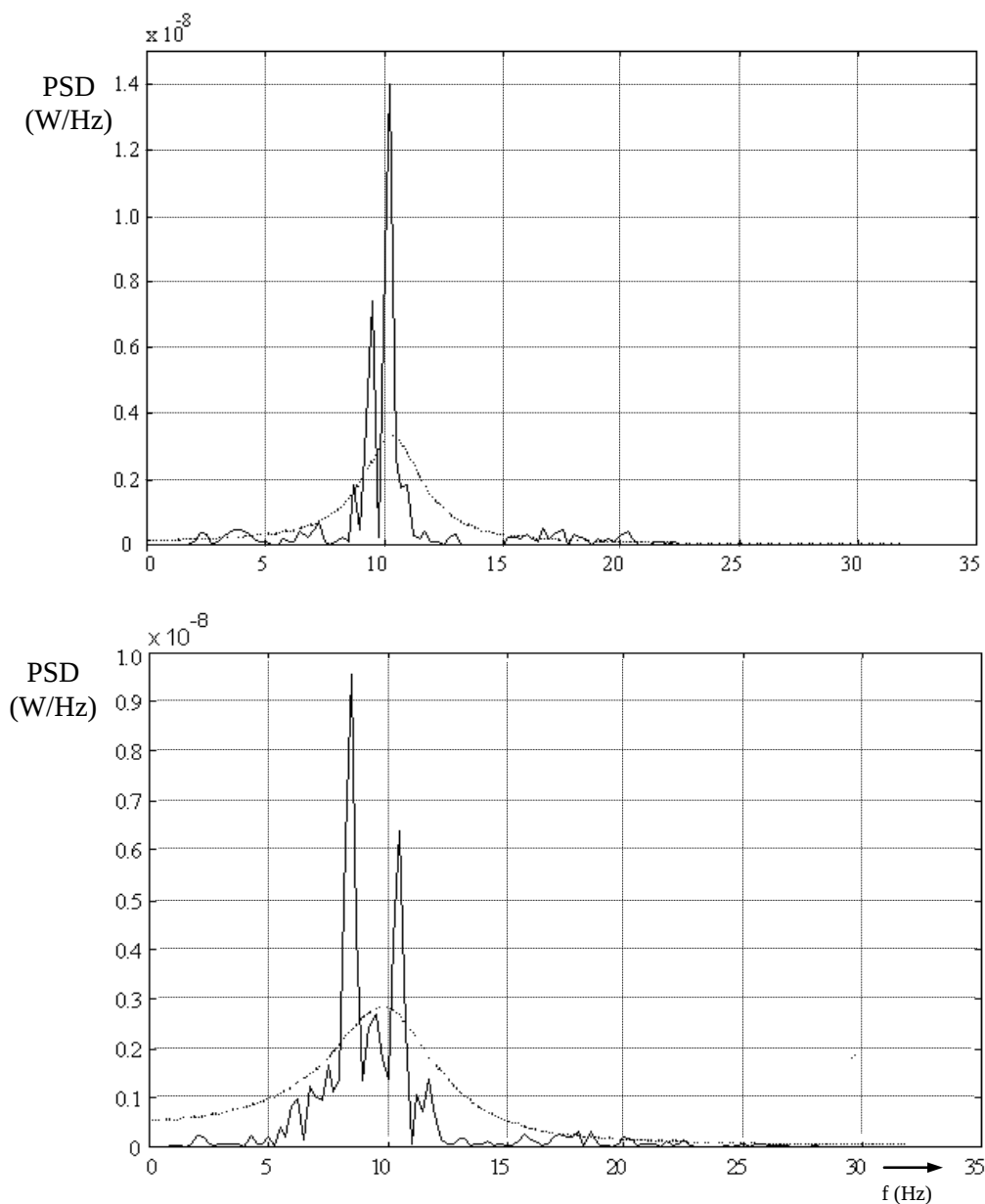
➤ **AIC** (Akaike information criterion)

$$AIC(p) = \ln(\sigma_p^2) + \frac{2p}{N} \quad (5.33)$$

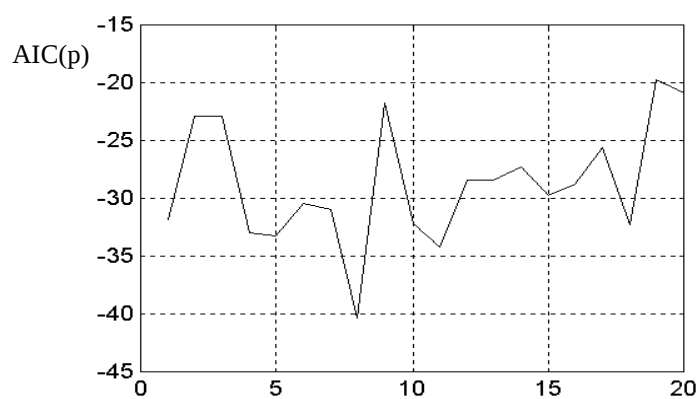
Na obr. 26 jsou pro příklad zobrazeny spektrální výkonové hustoty AR modelu a spektrální výkonová hustota počítaná pomocí Wiener - Chinčinova teorému (6.21). EEG signál je nyní v bipolárním zapojení kanálu P3 > 01 záznamu LAF01.trc. U tohoto záznamu by měla dominovat alfa aktivita. Na obrázku je vidět, že došlo k vyhlazení spektrální výkonové hustoty AR modelu, i když tato je opět soustředěna okolo frekvence 10 Hz, což odpovídá alfa aktivitě. Avšak AR model nemá dostatečnou rozlišovací schopnost, jsou-li dva spektrální vrcholy blízko sebe. Spektrální výkonová hustota je opět počítána s překrýváním intervalů dlouhých 256 vzorků. AR model je 8. řádu - $\{1, a_{17}, a_{27}, \dots, a_{77}\}$. Akaikeho kritériem bylo prověřeno, že AR model 8. řádu $\{1, -2.7359, -1.0037, -1.8055, -0.8176, 0.1817, 2.0151\}$ je vyhovující – viz tab. 3.

Tab. 3: Kritéria AR modelu (viz. obr. 27)

Řád mod.	σ_p	$FPE(p)$	$AIC(p)$
1.	-1.2557e-007	-1.2755e-007	-31.7729
2.	-1.0578e-005	-8.6084e-008	-22.8978
3.	-1.0578e-005	-8.1206e-008	-22.8900
4.	6.9736e-008	-7.8214e-008	-32.9259
5.	5.9446e-008	-5.9607e-008	-33.2373
6.	-2.3473e-007	1.4789e-007	-30.4828
7.	-1.8511e-007	-4.5621e-007	-30.9499
8.	1.7000e-009	1.8239e-009	-40.3228
9.	-1.8299e-005	0.0015	-21.7470
10.	-1.0139e-007	-5.2726e-007	-32.1304
11.	-3.6941e-008	-3.4559e-007	-34.1419
12.	6.4362e-007	-2.7996e-007	-28.4186
13.	-9.0662e-008	-2.4626e-007	-28.4186
14.	1.1177e-006	-2.3140e-007	-27.2991
15.	-3.1626e-007	-2.3057e-007	-29.8162
16.	5.0971e-007	-2.3225e-007	-28.8538
17.	-2.4992e-006	-2.2968e-007	-25.6663
18.	-9.4585e-008	-2.2641e-007	-32.2069
19.	4.8742e-005	-2.0934e-007	-19.7095
20.	-2.6973e-005	-1.9365e-007	-20.8851



Obr. 26: Spektrální výkonová hustota EEG (plná čára) a spektrální výkonová hustota AR modelu 8 řádu (přerušovaná čára)



Obr.27: Graf závislosti AIC kritéria na řádu modelu

5.4. Spektrální analýza

Spektrální analýza [2], [3], [4], [5] [6], [7], [8] a [9] je výkonný analytický nástroj, který umožňuje určit spektrum nebo spektrální výkonovou hustotu signálu. Matematickým základem těchto metod jsou ortogonální transformace, které přiřazují časovému průběhu signálu spektrum a naopak spektru signál. Jednou z nejpoužívanějších metod je Fourierova analýza. Ta předpokládá, že každý periodický signál lze reprezentovat součtem základních sinusovek a kosinusovek o příslušné amplitudě a frekvenci. Překreslíme-li tyto základní frekvence a jejich amplitudy (spektrální čáry) do grafu, získáme frekvenční spektrum (periodogram). Měříme je v jednotkách $\mu V^2/Hz$ (výkonová spektrální hustota) nebo $\mu V/\sqrt{Hz}$ (amplitudové spektrum). Spektrum je počítáno pomocí algoritmu rychlé Fourierovy transformace (FFT – Fast Fourier Transformation).

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) je definována

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (5.34)$$

a inverzní diskretní Fourierova transformace (IDFT) pak je

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (5.35)$$

Problémem Fourierovy transformace je, že předpokládá periodický signál. Při výpočtu jsme však omezeni konečným intervalem pozorování T (stacionarita). Proto signál musíme periodicky rozšířit – tedy interpolovat periodický signál za interval pozorování. Zvolení intervalu T je jako kdybychom původní signál $x(n)$ vynásobili obdélníkovým okénkem $w(n)$

$$x(n) = x(n) \cdot w(n), \quad \text{kde } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.36)$$

kde

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{pro ostatní } n \end{cases}$$

Při omezování délky pozorování T dochází k efektu zkreslení spektra a periodizace spektra. Jestliže navzorkujeme periodický signál tak, že délka pozorování T je právě periodou tohoto signálu, potom jednotlivé frekvenční složky tohoto signálu jsou zobrazeny ve spektru DFT tak, že každé z nich přísluší pouze jedna čára. Konečný interval pozorování T (šířka okénka) má vliv i na rozlišení dvou nejbližších spektrálních čar. Vzdálenost dvou spektrálních čar ve spektru signálu je Δf . Vzdálenost prvního průchodu frekvenčního okna nulou je $f = 1/T$. Je-li $f \leq \Delta f$, jsou ve výsledném spektru obě čáry dobře rozlišitelné. Při $f > \Delta f$ nelze správně rozhodnout o charakteru vstupního signálu. Je-li zvolena délka pozorování 2 vteřiny (stacionarita), získáme frekvenční složky s rozlišením 0,5 Hz (tj. spektrální čáry na frekvencích 0,5 Hz, 1 Hz, 1,5 Hz, 2 Hz, ...).

Mimo obdélníkového okénka můžeme použít i jiný druh okna

- Bartlettovo (trojúhelníkové) okno:

$$w(n) = 1 - 2 \frac{|n - N/2|}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Hanningovo:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Hammingovo

$$w(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Blackmanovo

$$w(n) = 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- Tukeyovo (kosinový zvon) – 10 % dat na začátku a na konci je vynásobeno

$$w(n) = 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), \quad \text{kde } M = N/10$$

a n pokrývá 10 % dat na začátku a na konci

□ Spektrální výkonová hustota

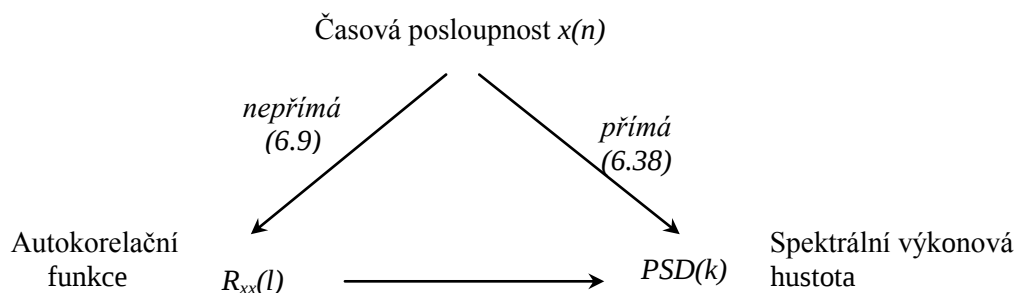
U náhodných signálů se místo pojmu spektrum zavádí pojem spektrální výkonová hustota (PSD). Spektrální výkonová hustota popisuje rozložení hustoty výkonu signálu v závislosti na frekvenci.

Pro určení spektrální výkonové hustoty lze použít metody

- **klasické** založené na použití diskrétní Fourierovy transformace (přímé a nepřímé)
- **parametrické** založené na popisu signálu souborem parametrů

Klasické metody

Postup pro výpočet spektrální výkonové hustoty je naznačen na obrázku č. 28.



Obr.28: Metody výpočtu spektrální výkonové hustoty

Nepřímá metoda spočívá v určení PSD pomocí Wiener – Chinčinova teorému. Pro digitální signály konečné délky je odhad spektrální výkonové hustoty určený diskrétní Fourierovou transformací vychýleného odhadu autokorelační funkce dán vztahem:

$$PSD(k) = \sum_{n=0}^{N-1} R_{xx}(n) \cdot e^{-j2\pi kn} \quad (5.37)$$

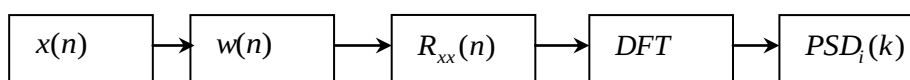
kde $R_{xx}(n)$ je autokorelační funkce vypočítaná podle vztahu (5.9).

Přímá metoda spektrální analýzy je moderní verze Schusterova periodogramu [23]. Odhad spektrální výkonové hustoty je počítán pouze pro vzorky segmentu $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ a je dán jako

$$PSD(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn} \right|^2 \quad (5.38)$$

Spektrální výkonová hustota určená Wiener – Chinčinovou větou (6.37) a spektrální výkonová hustota určená z periodogramu (6.38) jsou totožné.

Takto je získáno okamžité výkonové spektrum (periodogram, spektrogram) z každého jednotlivého okna. Každý odhad je zatížen systematickou chybou. Proto při dostatečné délce signálu je používána metoda průměrování dílčích periodogramů – získá se vyhlazený odhad. Jedna z metod průměrování periodogramu je Welchova metoda [14], [15], [16], [17], [21], [23]. Její princip je znázorněn na obr. 29.



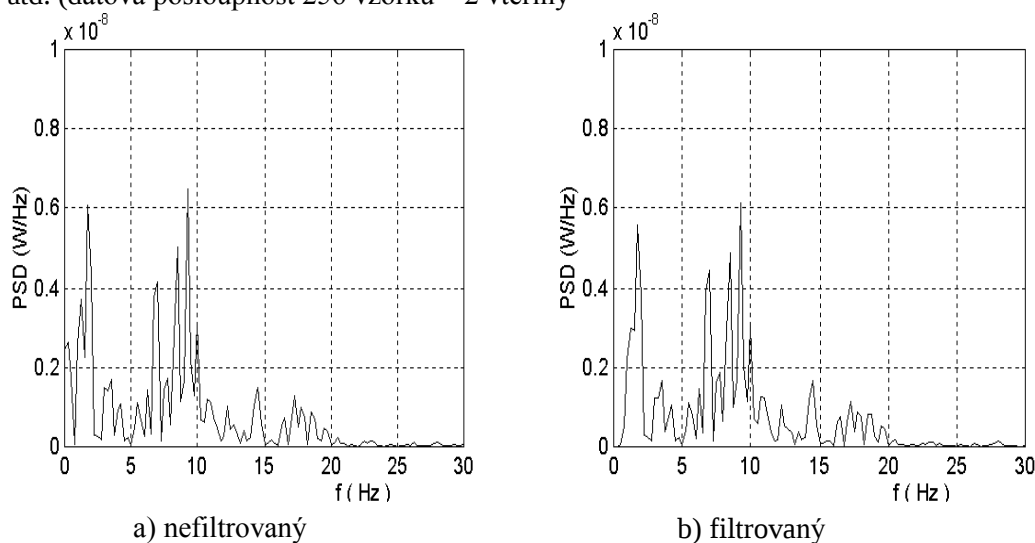
Obr. 29: Welchova metoda

Welch navrhl redukovat rozptyl periodogramu rozdělením vstupních dat $x(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$ na K segmentů, každý o délce M vzorků $x_i(m)$, $i=0,1,\dots,K-1$, $m=0,1,\dots,M-1$. Segmenty jsou buďto vedle sebe anebo se překrývají. Každý segment je vážen oknem a po transformaci dává dílčí modifikovaný periodogram $PSD_i(k)$. Výsledný vyhlazený odhad získáme zprůměrováním dílčích periodogramů:

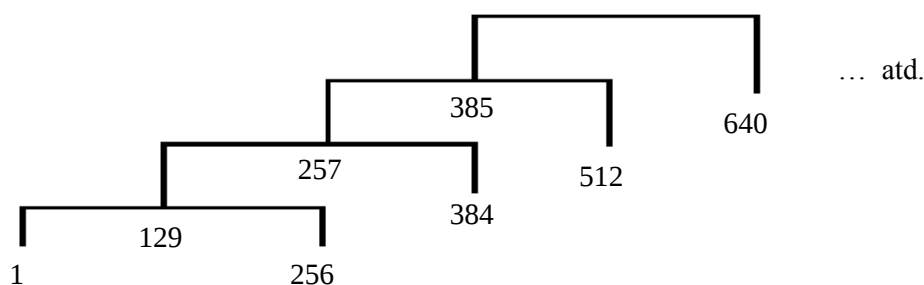
$$PSD(k) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} PSD_i(k) \quad (5.39)$$

Na obr. 30 a) je pro příklad uveden okamžitý odhad získaný z posloupnosti vzorků signálu LAF01.trc, kanálu P3. Délka datového segmentu je 256 vzorků, signál nebyl dosud filtrován. Obr. 30 b) je okamžitý odhad získaný ze stejného filtrovaného datového úseku.

Periodogramy dalších tří realizací náhodného EEG signálu jsou na obr. 32 (a) až (c). Délka každé realizace je opět 256 vzorků. Vzorky se překrývají – viz obr. 31: 1 - 256, 129 - 384, 257 - 512, 385 - 640, atd. (datová posloupnost 256 vzorků – 2 vteřiny)



Obr. 30: Odhad spektrální výkonové hustoty pro EEG signál Laf01.trc



Obr. 31: Znázornění posloupnosti datových oken

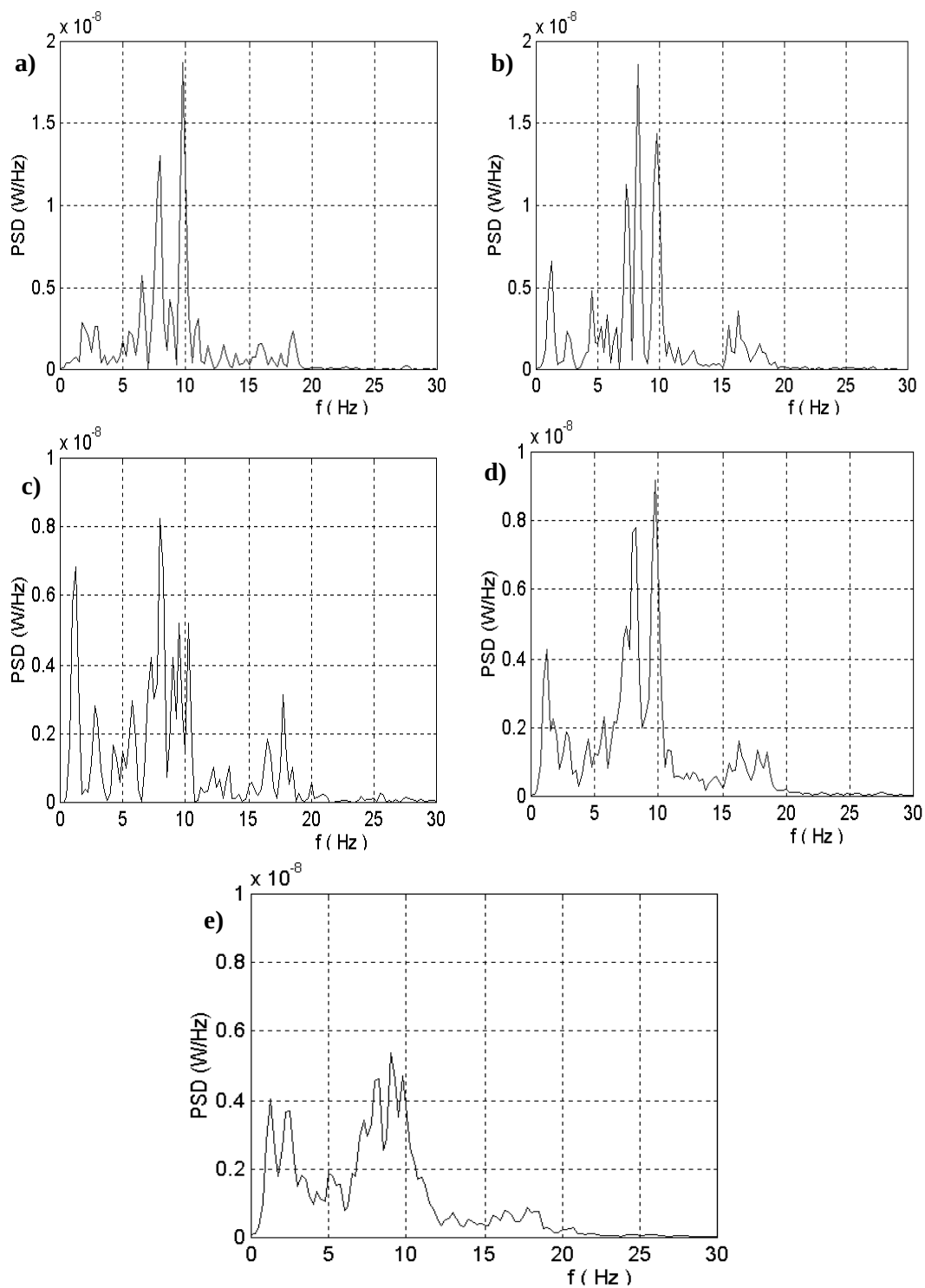
záznamu (Short Time Spectral Analysis), v tomto intervalu je signál kvazistacionární – viz požadavky na stacionaritu signálu). Odhad získaný průměrováním realizací 30 b) a 32 a) až 32 c) je na obr. 32 d). Pro srovnání je na obr. 32 e) zprůměrováno 10 segmentů v celkové délce 1 až 1408 vzorků, tj. 5,5 vteřiny.

Z obr. 32 e) lze vyčíst, že v EEG záznamu je spektrální výkonová hustota soustředěna na frekvencích 2 až 3 Hz, což odpovídá přítomnosti epileptické aktivity. Dále je spektrální výkonová hustota soustředěna na frekvenčním rozsahu 7 až 10 Hz, což odpovídá alfa aktivitě kanálu P3.

Spektrální výkonová hustota kvazistacionárních signálů může být zobrazena také v trojrozměrném prostoru (f , t , $PSD(k)$). Tento způsob je velmi názorný. Podrobněji bude rozebrán v kapitole 10 – Metody zobrazení výsledků spektrální analýzy.

Není-li k dispozici záznam signálu dostatečné délky, nemůžeme průměrovat větší množství datových segmentů.

Okamžité spektrální výkonové odhady stanoví pouze přítomnost frekvenčních složek. Neurčí však, který mód je dominantní. K určení „dominantnosti“ je možné použít korelační analýzu, tj. autokorelační funkci $R_{xx}(n)$ nebo křížové spektrum signálu $G_{xy}(f)$.



Obr. 32: Průměrování periodogramů EEG signálu Laf01.trc. Na obr. 32 d) jsou zprůměrovány odhady z obr. 30 b, 32 a) – 32 c). Na obr. 32 e) je zprůměrováno 10 odhadů signálu Laf01.trc.

5.5. Korelační analýza

Při analýze biologického signálu lze použít také korelační analýzu. Korelační analýza zkoumá vztahy mezi dvěma různými kanály EEG, které byly zaznamenány současně. Získáme tak vzájemnou spektrální výkonovou hustotu, nebo-li vzájemné (křížové) spektrum (cross spectrum). Anebo můžeme zkoumat poměry uvnitř jednoho kanálu. Obdržíme tak spektrum z jednoho kanálu - autospektrum.

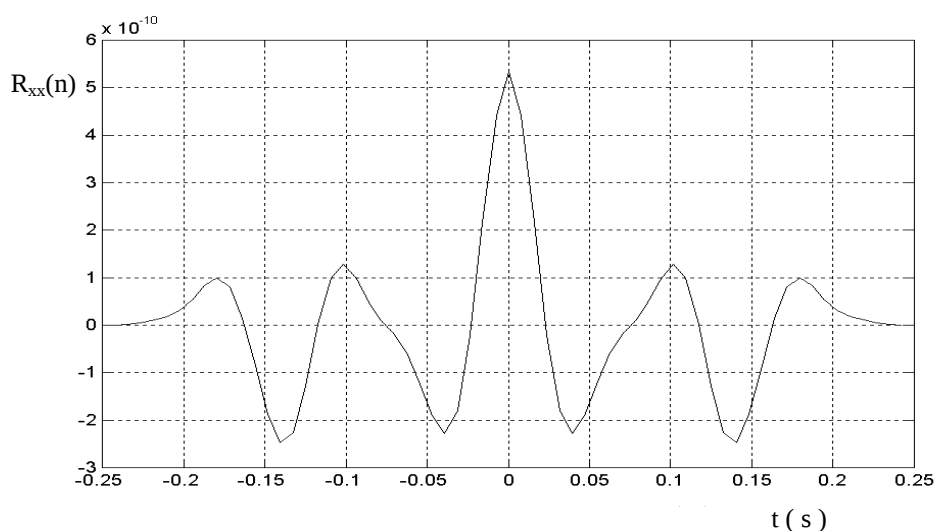
□ Autokorelační funkce

Autokorelační funkci $R_{xx}(n)$ můžeme určit podle vztahů (6.9), resp. (6.10). Známe-li spektrální výkonovou hustotu $PSD(k)$ lze autokorelační funkci $R_{xx}(n)$ určit také pomocí inverzní Fourierovy transformace:

$$R_{xx}(n) = FFT^{-1}\{PSD(k)\} \quad (5.40)$$

Na obr. 33 je pro příklad uvedena autokorelační funkce $R_{xx}(n)$ kanálu P3 EEG signálu. Tato funkce je počítaná pro $PSD(k)$ v obr. 31 a). Autokorelační funkce $R_{xx}(n)$ je periodická funkce s periodou přibližně 100 ms, tzn., že EEG signál obsahuje koherentní oscilace, které jsou dány frekvencí

$$f_{coh} \approx \frac{1}{0,1} \approx 10 \text{ Hz}$$



Obr. 33: Autokorelační funkce signálu EEG Laf01.trc

Spektrum na obrázku 32 a). ukazuje čáru umístěnou v okolí 10 Hz, proto tedy f_{coh} je dominantní frekvencí EEG.

□ Vzájemná spektrální výkonová hustota

Vzájemná spektrální výkonová hustota je určena Fourierovou transformací vzájemné korelační funkce $R_{xy}(n)$. Křížové spektrum $G_{xy}(f)$ můžeme získat také vynásobením spekter $G_x(f)$ a $G_y(f)$ jednotlivých kanálů. Jedná se o komplexní proměnnou:

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| \cdot e^{-j\varphi_{xy}(f)} \quad (5.41)$$

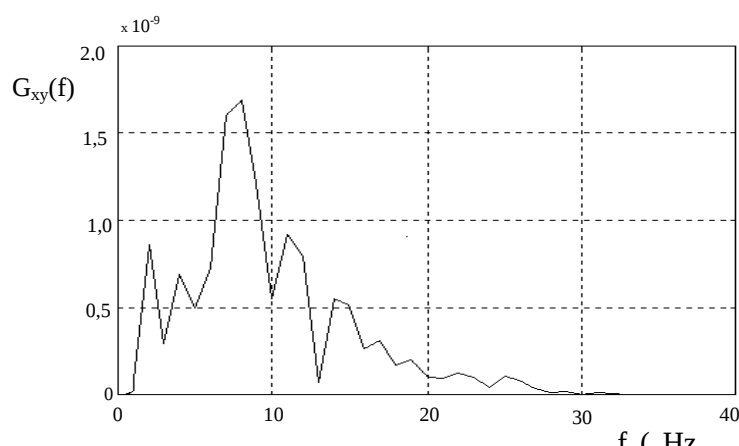
kde modul $|G_{xy}(f)|$ je amplitudové křížové spektrum

$$|G_{xy}(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{G_{xy}(f)\})^2 + (\operatorname{Im}\{G_{xy}(f)\})^2} \quad (6.42)$$

a $\varphi_{xy}(f)$ je fázové spektrum dané vztahem

$$\varphi_{xy}(f) = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{G_{xy}\}}{\operatorname{Re}\{G_{xy}\}} \quad (5.43)$$

Vzájemná spektrální výkonová hustota $G_{xy}(f)$ slouží jako míra podobnosti dvou signálů. Křížové spektrum ukazuje frekvenční čáry, které jsou společné oběma signálům.



Obr. 34: Vzájemná spektrální výkonová hustota $G_{xy}(f)$ mezi kanály P3 > O1

Pro příklad je uvedena na obr. 34 křížová korelace mezi kanály P3 > O1 signálu EEG LAF01.trc. Z obrázku lze vyčíst, že v obou kanálech je přítomna alfa aktivita (8 – 13 Hz) a epileptická aktivita (1,8 až 4,5 Hz).

Vzájemná spektrální výkonová hustota slouží většinou jako mezivýsledek pro výpočet dalších charakteristik – koherenční funkce, frekvenční charakteristiky.

Vzájemnou spektrální výkonovou hustotu $G_{xy}(f)$ můžeme také použít pro určení vzájemného zpoždění dvou signálů. Zpoždění $\tau(\omega)$ mezi dvěma kanály je určeno jako derivace fázového spektra podle frekvence:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi_{xy}(\omega)}{d\omega}, \quad \text{kde } \omega = 2\pi f \quad (5.44)$$

Časové zpoždění Δt dvou signálů je určeno z fázového zpoždění $\Delta\varphi$ (obr. 35). Fáze totiž vyjadřuje poměrnou část periody sinusové složky signálu a lze ji převést na odpovídající časový údaj [5], [6], [33], [35], [36] vztahem

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{360 \cdot \Delta f} \quad (5.45)$$

kde $\Delta\varphi$ je ve stupních a Δf je v Hz, přičemž tato doba je pokládána za kladnou, jestliže soustava signál posune v záporném smyslu, tj. bude-li $\Delta\varphi < 0$.

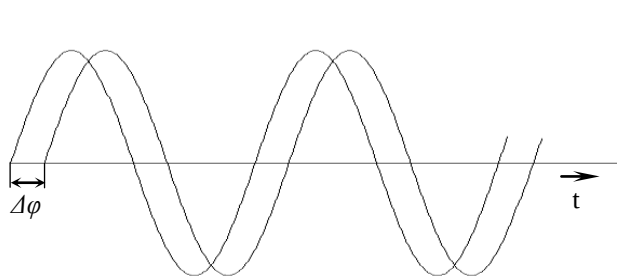
Protože z „jednoho bodu“ nelze jednoznačně určit zda se jedná o předbíhání fáze nebo o zpoždění, je časové zpoždění (časový rozdíl) mezi dvěma kanály počítáno ze sklonu fázové charakteristiky [35], [36] – obr. 36.

Skupinové zpoždění $\tau(\omega)$ mezi dvěma kanály je určeno :

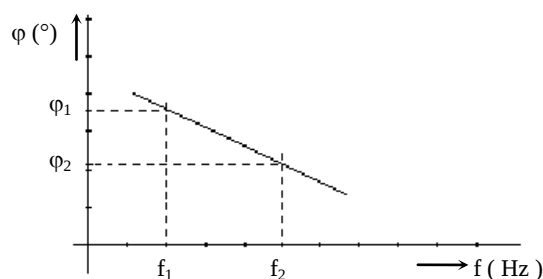
$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d(\omega)} = -\frac{d\varphi(\omega)}{2\pi df} \Rightarrow$$

$$\Delta t = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{360 \cdot (f_2 - f_1)} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360 \cdot (f_2 - f_1)} = \frac{\Delta\varphi}{360 \cdot \Delta f} \quad (5.46)$$

kde $\Delta\varphi$ je fázový rozdíl ve stupních při frekvenci f v Hz, Δf je rozsah frekvencí na kterém je počítán sklon – obr. 36. Výpočet fázového sklonu z frekvenční závislosti vyloučí nejednoznačnost při „bodovém“ určení fáze.



Obr. 35: Fázové zpoždění



Obr. 36: Určování fázového zpoždění

Metoda:

Pro dva signály $x(t)$ a $y(t)$ předpokládáme následující lineární vztah (jeden signál je zpožděn za druhým)

$$y(t) = kx(t - \Delta t) + n(t) \quad (5.47)$$

kde $n(t)$ je bílý šum, nekorelovaný s $x(t)$.

Pak křížové spektrum je

$$G_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[X(f)Y^*(f)] \quad (5.48)$$

$X(f)$ a $Y(f)$ jsou Fourierovy transformace $x(t)$ a $y(t)$ a T je časové okno pozorování. Protože $n(t)$ a $x(t)$ jsou nekorelované, platí

$$G_{xy}(f) = kG_{xx}(f)e^{j2\pi\Delta t f} \quad (5.49)$$

kde G_{xx} je výkonové spektrum $x(t)$. Jelikož G_{xx} a k jsou reálná čísla, fázové spektrum křížového spektra mezi signály $x(t)$ a $y(t)$ je dáno vztahem

$$\varphi_{xy}(f) = 2 \cdot \pi \cdot \Delta t \cdot f \quad (5.50)$$

je tedy lineární funkcí frekvence. Časový posuv tedy může být získán ze sklonu fázové charakteristiky.

Pro reálné EEG signály je časový posun určen lineární regresí odhadnutého fázového spektra na frekvenčním intervalu, kde koherence je významně vyšší než nula. (nemůžeme odhadovat fázový posuv na frekvencích, které neexistují v obou signálech).

□ Koherenční funkce

Jsou-li signály popsány spektrální výkonovou hustotou, vzájemnou spektrální výkonovou hustotou a frekvenční charakteristikou je někdy potřeba posoudit přesnost odhadu těchto charakteristik – míru přesnosti. Touto mírou je koherenční funkce. Koherenční funkce $COH_{xy}(f)$ je reálná funkce reálné proměnné. Koherence měří míru korelace (závislosti) mezi dvěma signály na dané frekvenci. Její hodnoty leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Ideálně je nezávislá na amplitudách signálů. Koherenční funkce je definována pomocí vzájemné a vlastní spektrální hustoty

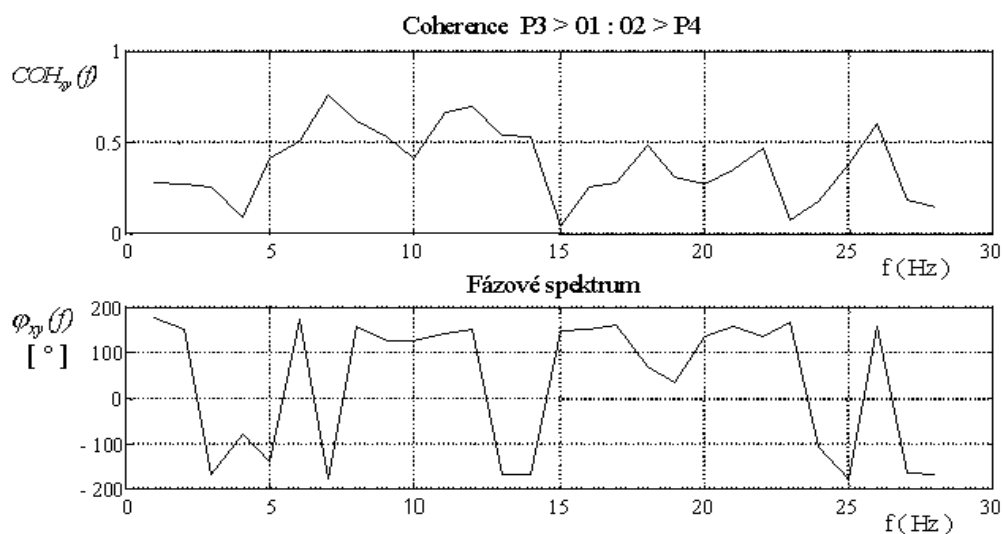
$$COH_{xy}(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f) \cdot G_y(f)} \quad (5.51)$$

Je-li $COH_{xy}(f) = 0$, potom $x(t)$ a $y(t)$ jsou na daném kmitočtu nekorelované (žádná relace), naproti tomu pro $COH_{xy}(f) = 1$ jsou $x(t)$ a $y(t)$ na daném kmitočtu korelované (ideální korelace).

Jednou z možností využití koherence je testování symetrie mezi kanály EEG [29], [30]. V mnoha případech je potřeba použít normalizovanou hodnotu křížového spektra. V elektroencefalografii například mohou být sousední kanály EEG různě utlumeny průchodem elektrického potenciálu lebkou, tkání apod. V tomto případě definujeme amplitudovou koherenci

$$COH_{xy}(f) = \frac{|G_{xy}(f)|}{\sqrt{G_x(f) \cdot G_y(f)}} \quad (5.52)$$

Na obr. 37 je demonstrována v jednom obrázku koherence a fázové spektrum signálu EEG - LAF01.trc bipolárního zapojení kanálů $P3 > O1$ a kanálů $O2 > P4$. O významnosti údajů fázové charakteristiky má smysl uvažovat jen pro ty frekvence, kde je koherence blízká jedné. Fázové spektrum zobrazuje střední časové rozdíly mezi společnými frekvenčními složkami. Udává se ve stupních.



Obr. 37: Koherence $\text{COH}_{xy}(f)$ a fázové spektrum $\varphi_{xy}(f)$ bipolárního zapojení kanálů P3 > 01 a 02 > P4 signálu Laf01.trc



CD-ROM

Otevři soubor BM – frekv, spusť animaci prezentace 2_10



Otázky 5

1. Jak určíme časové zpoždění mezi dvěma signály?
2. Jakou informaci získáme při použití koherenční funkce
3. Jak je definováno skupinové zpoždění?
4. Co je to křížové spektrum
5. Jak určíme dominantní frekvenci v signálu



Úlohy k řešení 5

1. Určete pomocí algoritmu decimace v čase FFT posloupnosti $\{1, 0, 0, 1\}$ řešení: $\{2, 1+j, 0, 1-j\}$
2. V programu Matlab ověřte správnost výsledků z příkladu 5.3. Nakreslete amplitudové a fázové spektrum.
3. Vytvořte program v MATLABu pro načtení vykreslení naměřených dat ze souboru XXX.trc. Data vykreslete minimálně ze dvou kanálů.



Korespondenční úkol

V programu Matlab

- Nasimulujte signál o délce 2^n bodů.
- Proveďte FFT nasimulovaného signálu

Zpětně rekonstruuje signál. Při zpětné rekonstrukci nevyužívejte funkci `ifft` v MATLABu.

Pozn.: použijte funkce: $a_n = 2 \cdot \text{real}(c_n)$, $b_n = -2 \cdot \text{imag}(c_n)$

Práci odevzdejte do 14 dní po zadání domácí úlohy.



Text k prostudování

- [1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005



Další zdroje, použitá literatura

- [2] Proakis, J.G., Manolakis, D.G.: Introduction to Digital Signal Processing. Macmillan Publishing Company, New York, 1988 (ISBN 0-02-396815-X)[2])
- [3] Mitra, S.K., Kaiser, J.F.: Digital signal Processing. 1 John Wiley & Sons, Ing., New York, 1993 (ISBN 0-471-61995-7)
- [4] Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. SNTL, Praha 1976
- [5] Vích, R.: Návrh číslicových filtrů a korektorů útlumu s lineární fází metodou kmitočtového vzorkování. Slaboproudý obzor 42, r. 1981, č. 10, str. 475 – 479
- [6] Lynn, P.A.: On line digital filters for biological signals: Some fast designs for small computer. Med. & Biol. Eng. & Comput., vol.15, 1977
- [7] Jan, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT Brno, 1997, (ISBN 80-214-0816-2)
- [8] Kay, S.M., Marple, S.L.: Spectrum Analysis – A Modern Perspective, Proc. IEEE, vol. 69, 1981, pp. 1380-1419
- [9] Cooley, J.W., Tukey, J.W. An algorithm for the machine computation of Complex Fourier Series, Math.Comp. vol.19, 1965, pp. 297-301
- [10] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc., 2000 Reference

6. ZOBRAZENÍ VÝSLEDKŮ SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY



Čas ke studiu: 1 hodinu



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- graficky zobrazit výsledky spektrální analýzy
- umět metodu topografické mapování
- umět metodu spektrálních zhuštěných kulis – CSA



Pojmy k zapamatování 6

CSA – zhuštěné spektrální kulisy, topografické mapování – mapping.



Výklad

Nespornou výhodou počítačového zobrazování dat je možnost efektivní manipulace se signálem, jeho zpracování, úprava a zobrazení. Jednou z možností je zobrazení výsledků numerické analýzy ve formě různých grafů. Z bohaté palety prostředků pro zobrazování výsledků spektrální analýzy se soustředíme pouze na dva směry: na metodu zhuštěných spektrálních kulis (CSA, compressed spectral arrays) a topografické mapování mozkové aktivity (brain mapping).

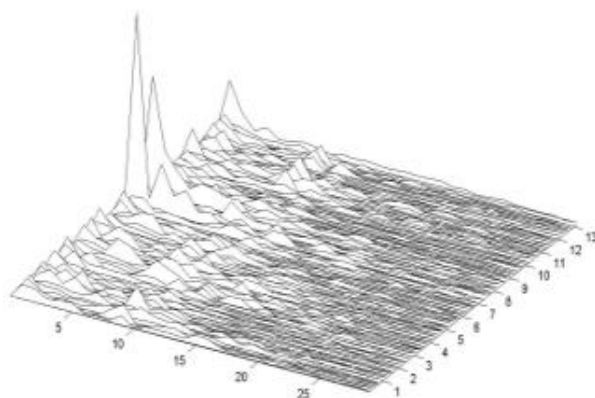
6.1. Metoda zhuštěných spektrálních kulis – CSA

Metoda zhuštěných spektrálních kulis je jedna ze standardních metod pro monitorování signálové aktivity ve frekvenční oblasti. Podstatou metody je výpočet frekvenčních křivek z kratších úseků (např. 2 vteřiny) a jejich seřazení v trojdimenzionální projekci – metoda zhuštěných spektrálních kulis – CSA, compressed spectral arrays, kterou poprvé navrhl Bickford [9]. Princip metody spočívá v tom, že se postupně počítají frekvenční křivky z úseků délky 2 až 4 sekundy. Vypočtené frekvenční křivky se pak postupně vykreslí jedna za druhou v pseudo-trojrozměrné projekci – $(f, t, PSD(f))$ (představme si, že spektra vystříháme z papíru a ty pak nalepíme za sebou tak, jako kulisy v divadle) tak, že později vykreslená nepřekrývá předchozí. Tímto způsobem je možné sledovat posun a změny frekvenčních komponent v průběhu času – popis dynamického chování signálu ve spektrální oblasti.

Výhodou metody je přehledné zpracování delších úseků biologických záznamů.

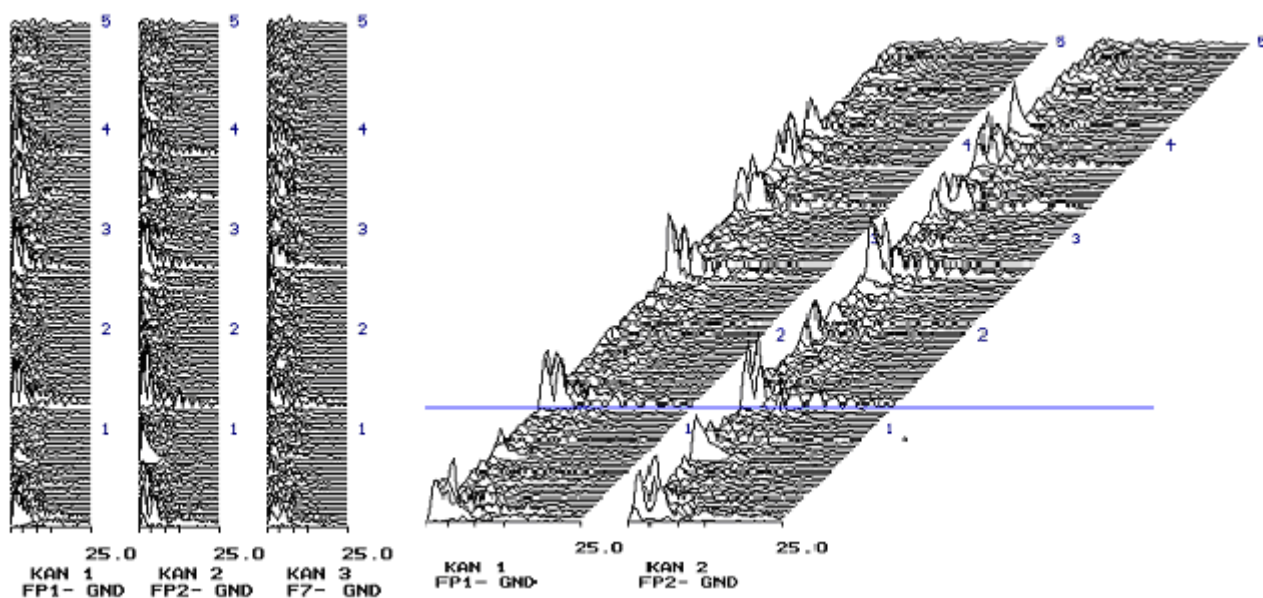
Nevýhodou metody je ztráta časové informace o tvaru signálu při transformaci do frekvenční oblasti. Tato nevýhoda se však dá eliminovat prohlížením původního úseku v originálním záznamu.

Ukázka CSA je na obr. 38, spektrální výkonová hustota je zde počítána pomocí Wiener – Chinčinyovy věty. Každá spektrální křivka představuje 2 vteřiny dat. Na obr. 39 a) je ukázka CSA z programu Matlab. Na obrazovce lze zobrazit až několik minut signálu v několika kanálech – podle možnosti výpočetní techniky. Všimněme si výrazných pomalejších frekvencí, které zřetelně identifikují místa s epileptickými paroxysmy.



Obr. 38: Zobrazení spektrální výkonové hustoty PSD – $(f, t, PSD(f))$ signálu EEG metodou CSA v prostředí Matlab

Vlastnosti signálu jsou ještě lépe vidět při jiném sklonu kulis obr. 39 a,b) – viz animace CSA_BM. Uživatel může v prostředí Matlab libovolně měnit sklon, měřítko i rozteč kulis tak, aby dosáhl optimální projekce obrázku.



a)

b)

Obr. 39 a,b): Jiná varianta zobrazení CSA

U multikanálového záznamu (např. EEG) je možné pomocí kursoru vybrat příslušný originální úsek EEG signálu, z něhož byla křivka spočtena a prohlížet signál střídavě v časové i frekvenční oblasti (obr. 40).



Obr. 40: Skok do EEG stránky vybrané kursorem z obr. 39 b)

Pro ještě větší názornost můžeme spektrální pásma odlišit barevně – viz obr. 41.

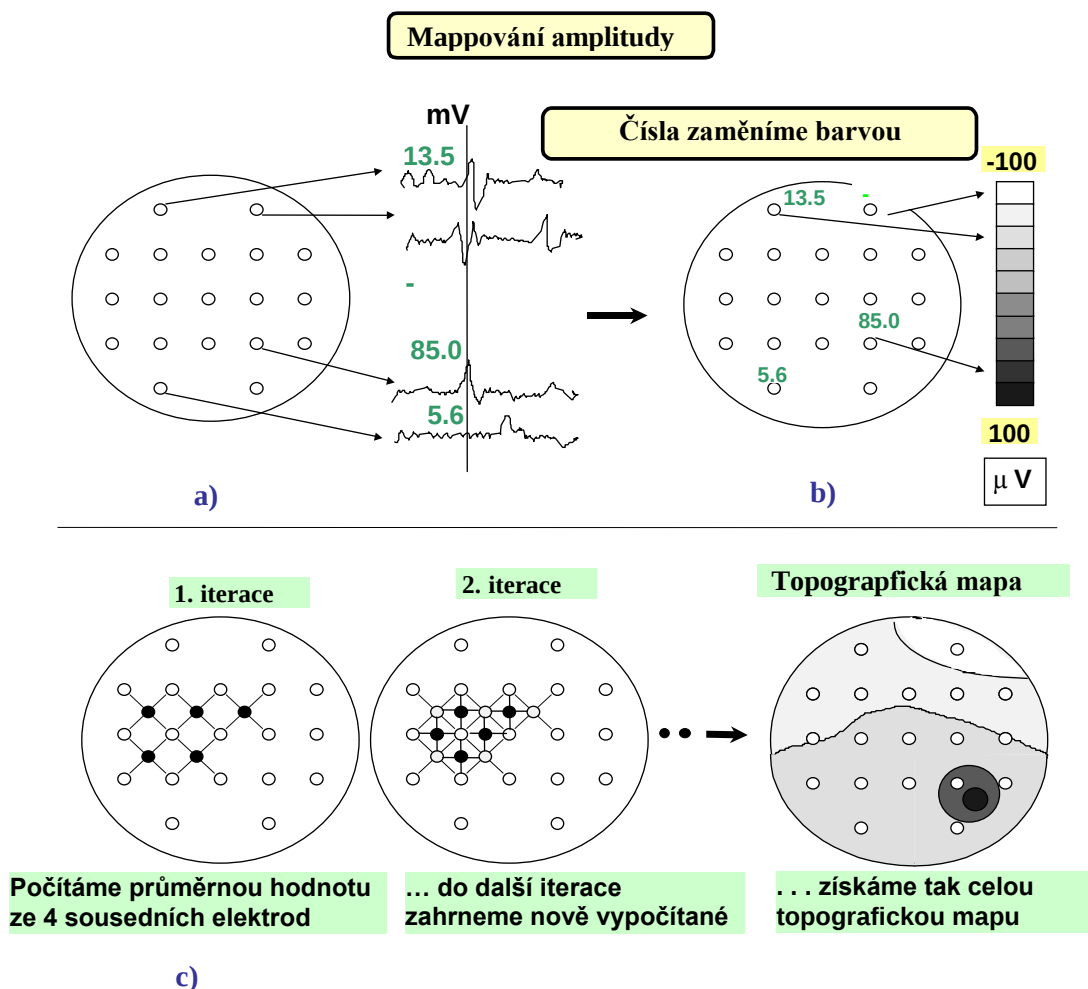
Metody CSA využijeme všude tam, kde je potřeba sledovat dynamický vývoj frekvenčních charakteristik v čase – např. při monitorování EEG

6.2. Topografické mapování – brainmapping – BM

Při topografickém mapování mozkové aktivity vlastně zjišťujeme prostorové (plošné) „projevy“ aktivity. V našem případě se zaměříme na topografického zobrazování mozkové aktivity – zde patří **brain mapping (BM)** – *mapa okamžitého rozložení amplitud potenciálů*. Podstata BM spočívá v zakódování číselných hodnot signálu do barevné škály a jejich iterativní interpolaci i na oblasti, kde hodnoty signálu nebyly naměřeny. Rozmístění elektrod na hlavě u 19 kanálového EEG je v systému 10/20

□ Topografické mapování – amplitudy

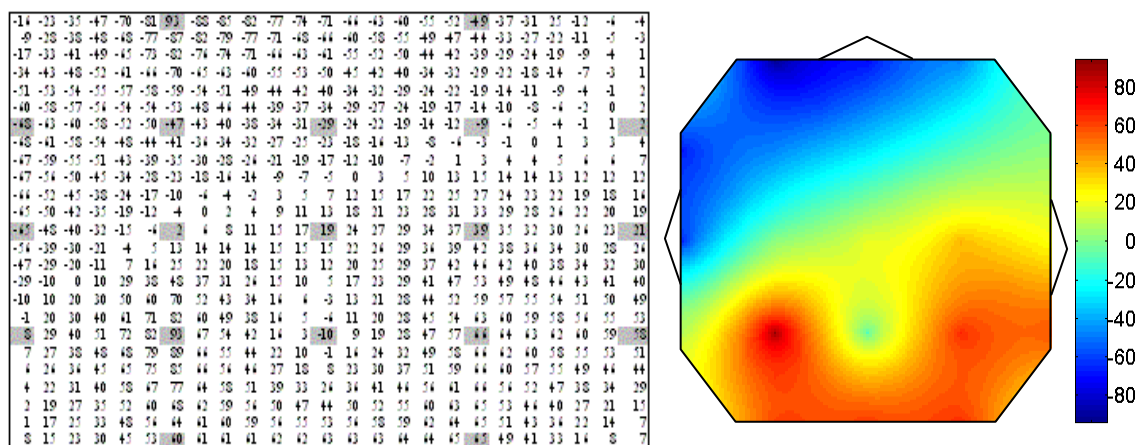
Z didaktických důvodů je vhodné se nejprve věnovat mapování amplitudy, kde se dá podstata BM vysvětlit nejlépe. Princip je přehledně zobrazen na obr. 42 v několika krocích.



Obr.42: Princip mapování amplitudy

POSTUP

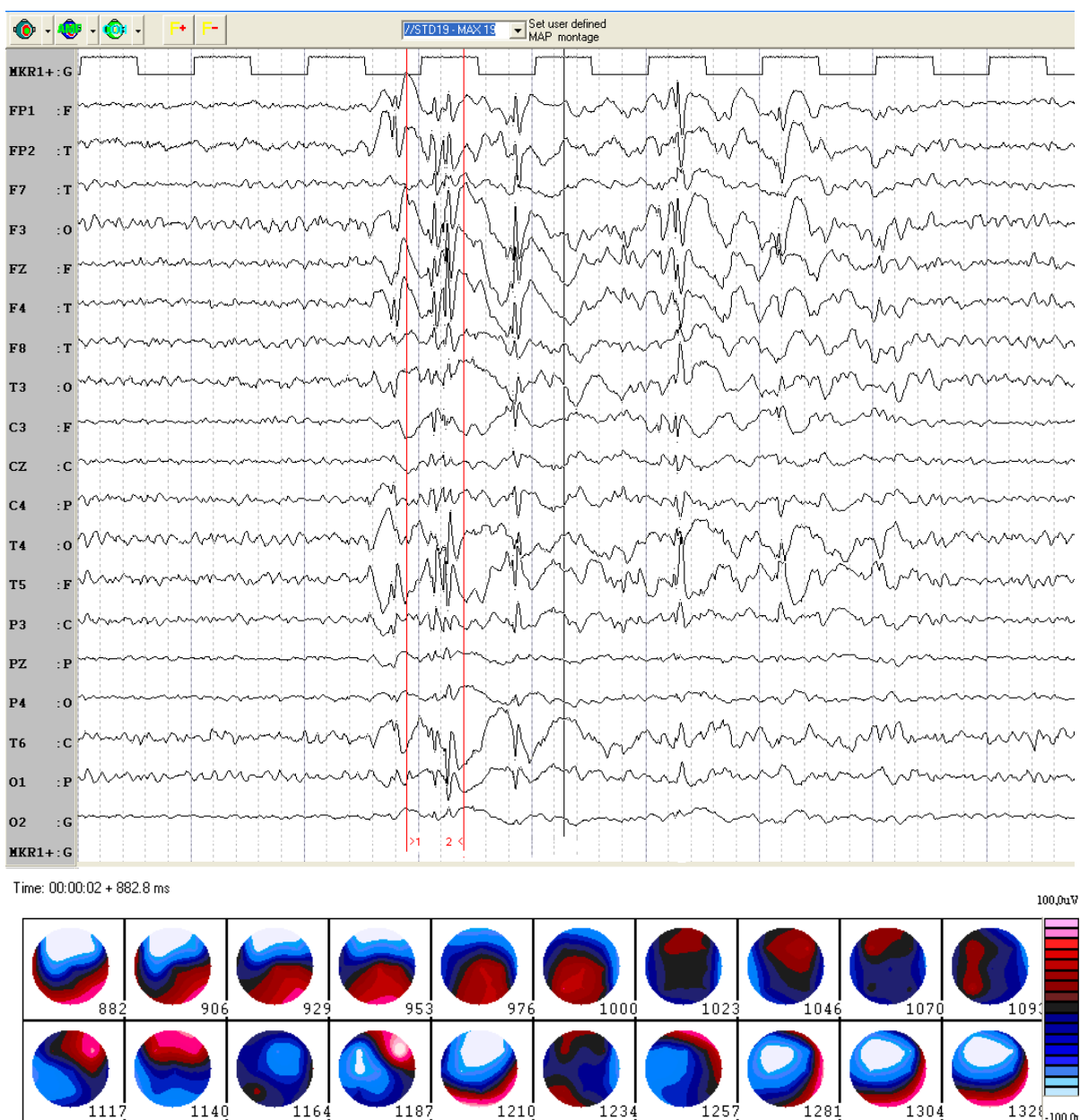
1. V multikanálovém záznamu zvolíme určitý časový okamžik, např. kurzorem – obr. 42 a),
2. Naměřeným číselným hodnotám amplitudy signálu přiřadíme barvu ze zvolené časové škály (rozdělené například na 16 barevných subintervalů) – obr. 42 b),
3. V několika iteračních krocích postupně interpolujeme novou hodnotu například jako průměr ze čtyř sousedních elektrod – obr. 42 c). Interpolaci opět opakujeme včetně zahrnutí nově vypočítaných hodnot a tak postupně zobrazení zjemňujeme, až pokryjeme barevně celou plochu
4. Získáme tak barevně zakódovanou informaci o hodnotách EEG amplitudy pro daný časový okamžik ve tvaru mapy prostorového rozložení příslušné číselné hodnoty.



Obr. 43: Příklad mapování amplitudy v prostředí Matlab – v tabulce jsou zobrazeny odečtené hodnoty amplitud z EEG záznamu – neiterované hodnoty jsou barevně podbarveny. Vpravo je zobrazena amplitudová mapa číselných hodnot z tabulky

Na obr. 43, je uveden příklad amplitudové mapy signálu ALBA1. Lze zobrazit různé mapy pro různé polohy kursoru, nebo také nechat projíždět kursor po signálu automaticky a sledovat dynamiku změn v amplitudě například při průchodech epileptickým hrotem a snažit se vysledovat zdroj záchvatů (tzv. cartooning, rychlá animace map jako v kresleném filmu) – viz obr 44.

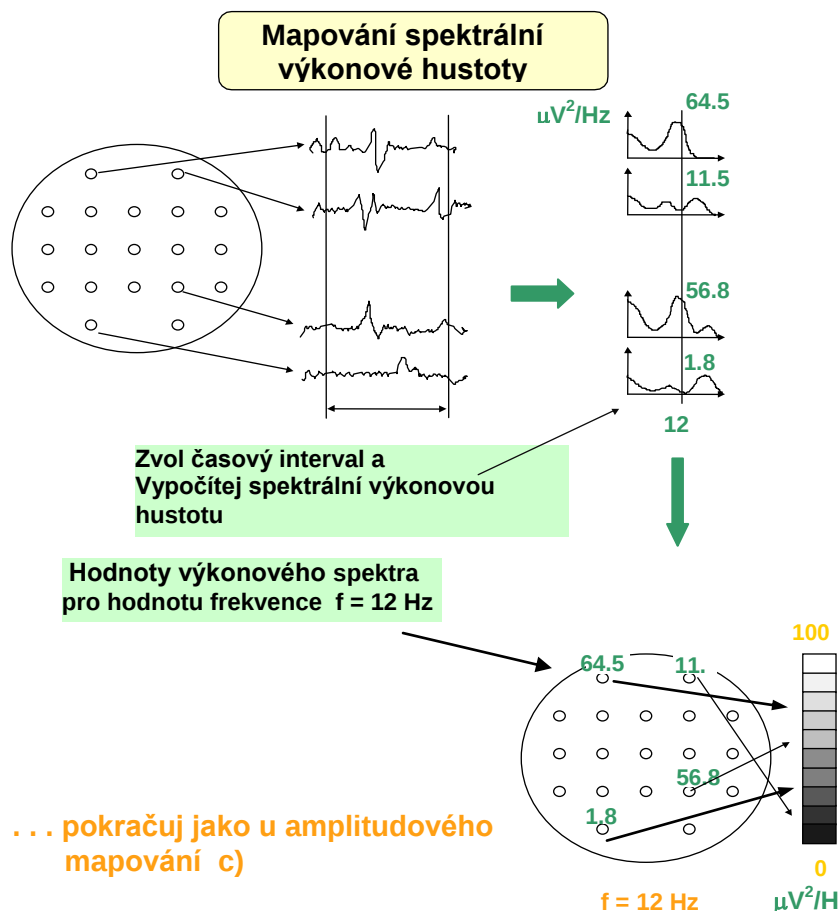
Amplitudový BM provádí pouze transformaci z dvojdimenzionálního do dvojdimenzionálního prostoru; nepřináší tedy novou informaci, pouze ji názorněji zobrazuje



Obr. 44: Ukázka amplitudového brain mappingu z programu Wave Finder - znázorněny jsou amplitudové mapy mezi kurzory

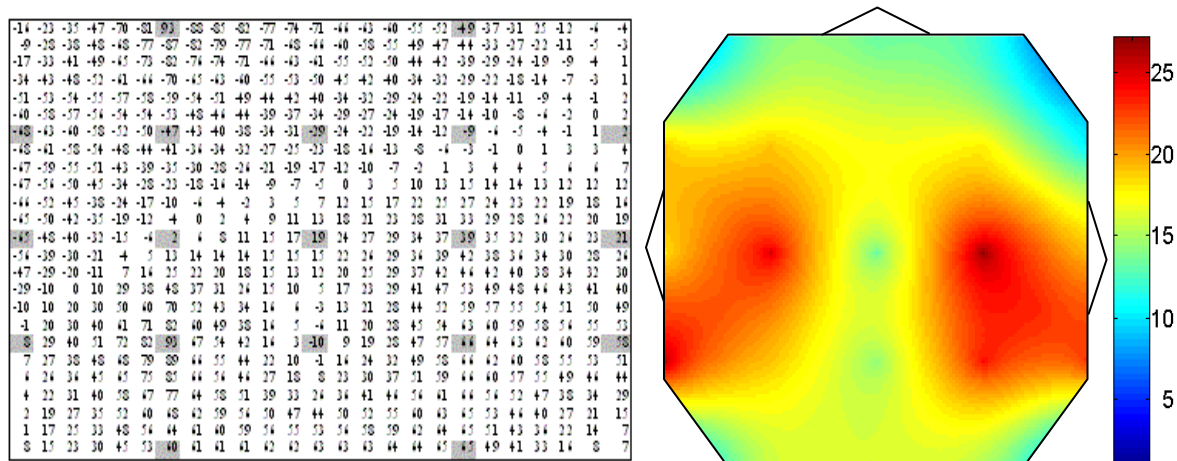
□ Topografické mapování frekvence

Postup pro určení frekvenčního BM (mapování) je na obr. 45. Vychází se ze stejných principů, jako při mapování amplitudy. Jediný rozdíl je v tom, že nyní nebereme hodnoty pouze v jednom průřezu, ale v časovém intervalu, který je pro všechny kanály stejný. V daném časovém intervalu vypočteme pro každý kanál výkonové spektrum. Vynesením amplitud spekter pro danou frekvenci ve všech kanálech získáme hodnoty, které jsou zobrazeny v barevné škále. Postupnou iterací (jako u amplitudového BM) je získána síť bodů, které jsou uvedeny v tabulce – viz obr. 46 (neiterované hodnoty amplitud výkonových spekter jsou opět barevně vyznačeny)



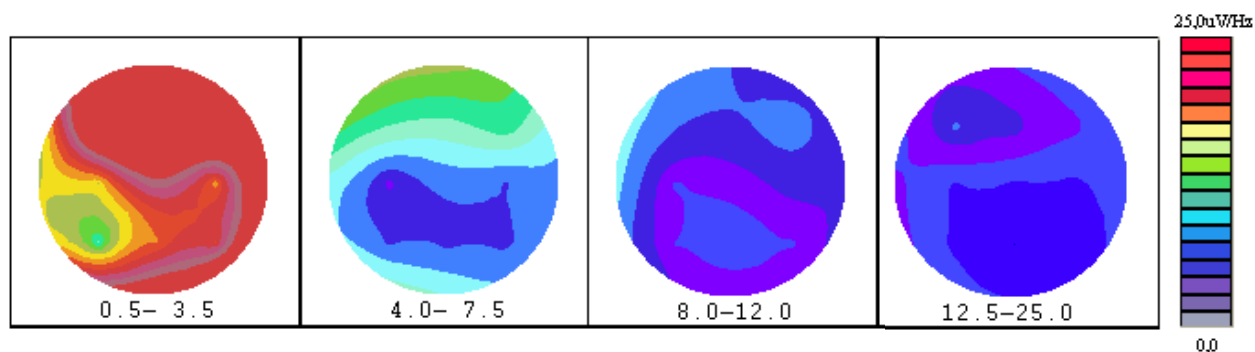
Obr. 45: Princip frekvenčního mapování

Při frekvenčním rozboru tedy nemapujeme přímo originální EEG signál, ale výkon (amplitudu) frekvenčních křivek, které jsou ze záznamu vypočítány pro určitou frekvenci.



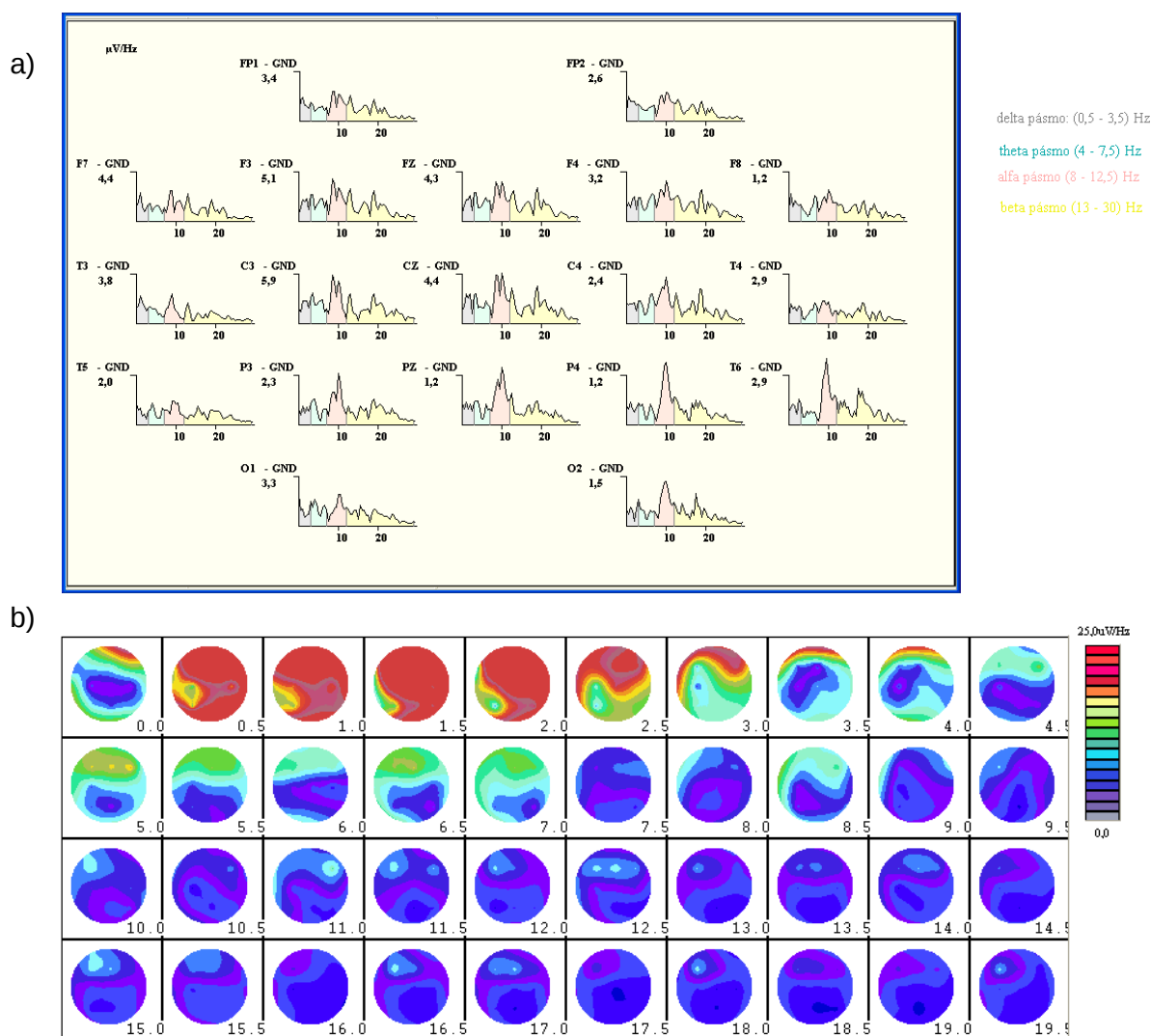
Obr. 46: Příklad frekvenčního mapování v prostředí Matlab – v tabulce jsou zobrazeny odečtené hodnoty amplitud z $PSD(f)$ záznamu EEG – neiterované hodnoty jsou barevně podbarveny. Vpravo je zobrazena frekvenční mapa pro číselné hodnoty z tabulky – hodnoty jsou uvedeny pro $f = 7$ Hz

Zobrazit můžeme také čtyři mapy ukazující $PSD(f)$ na povrchu hlavy pro jednotlivá frekvenční pásma pro stejný časový interval jako v obr. 44., - viz obr. 47. Musíme si však být vědomi zjednodušení, kterého se tímto dopouštíme.



Obr. 47: Příklad mapování frekvence pro čtyři spektrální pásma

Příklad detailního mapování frekvencí je ukázán na obr. 48a) pro stejný časový interval jako v obr. 44. V obrázku jsou zobrazeny spektrální křivky pro jednotlivé kanály. Spektrální pásma jsou zde vyznačena různými barvami. Na obr. 48b) pak jsou vyznačeny frekvenční mapy pro jednotlivé frekvence.



Obr.48: a) Frekvenční křivky v jednotlivých kanálech

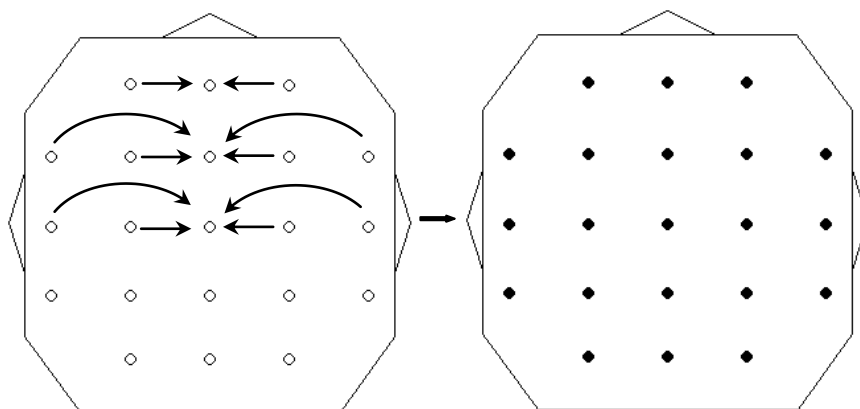
b) Přesnější mapování jednotlivých frekvencí.

□ Topografické mapování koherence

Mapování koherence se používá pro sledování interhemisferálních vztahů (symetrie a synchronie) [30]. Výsledek ve formě map přináší nové informace o symetrii mezi kanály – případné nesymetrii ve spektru. Tím usnadní lékařovo rozhodnutí.

Koherence měří míru lineární závislosti mezi dvěma kanály pro každou frekvenci. Mezelektrodová koherence se určí z hodnot normalizovaného křížového spektra mezi dvěma kanály (Kapitola 5.4.3 – Koherenční funkce: vztah 5.51 – popř. 5.52). Může být buďto interhemisferální nebo lokální (Rappelsberger 1993).

Interhemisferální koherence je určována v systému 10/20 v laterálních řadách vzhledem k referenční elektrodě, která je buď FPZ, PZ, CZ, FZ nebo OZ (elektroda FPZ je získána jako: $FPZ = (FP1 + FP2)/2$, stejně elektroda OZ: $OZ = (O1 + O2)/2$). Princip interhemisferální koherence je na obr. 49.



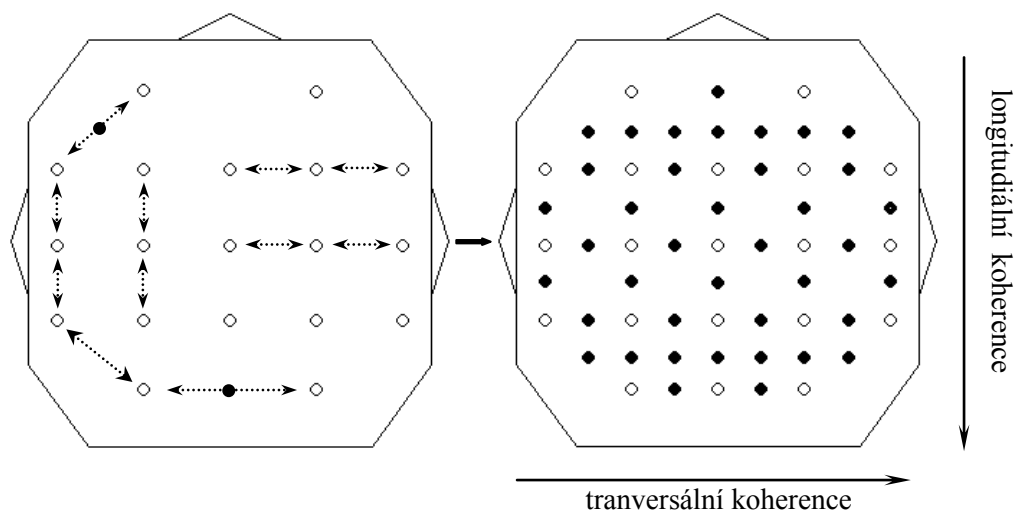
Obr. 49: Princip vazeb mezi kanály použitých při výpočtu koherenční mapy (interhemisferální koherence)

Úkolem metody je odhalit skryté závislosti (asymetrie ve spektru)

Nevýhodou interhemisferální koherence je, že se někdy ukáže symetrie, která tam ve skutečnosti není. Tato nevýhoda je odstraněna u lokální koherence.

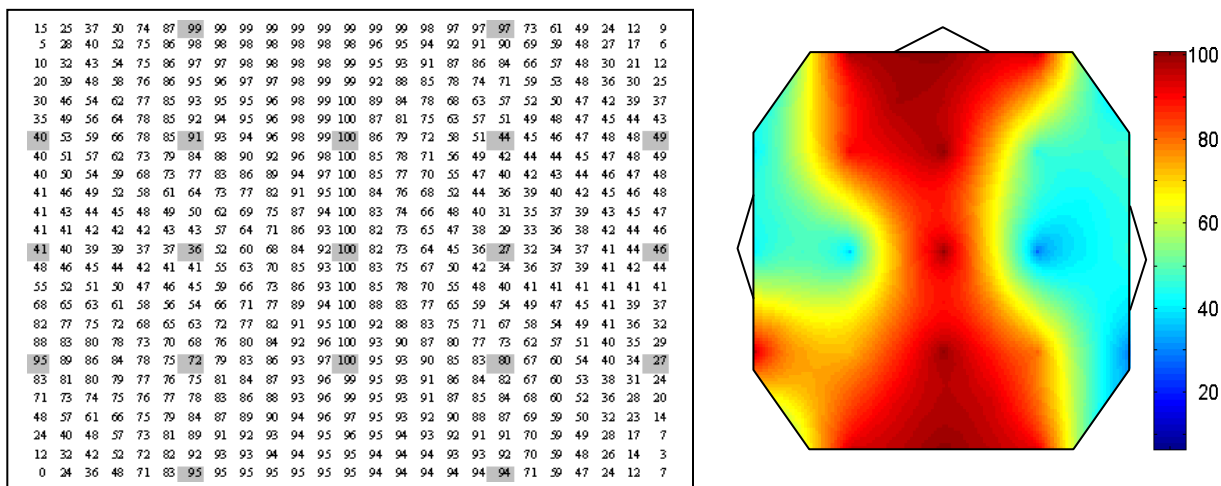
Princip lokální koherence je na obr. 50. Koherence je vždy počítána mezi dvěma elektrodami

- nejdříve ve svislém směru (longitudiální koherence)
- pak příčně (transversální koherence)



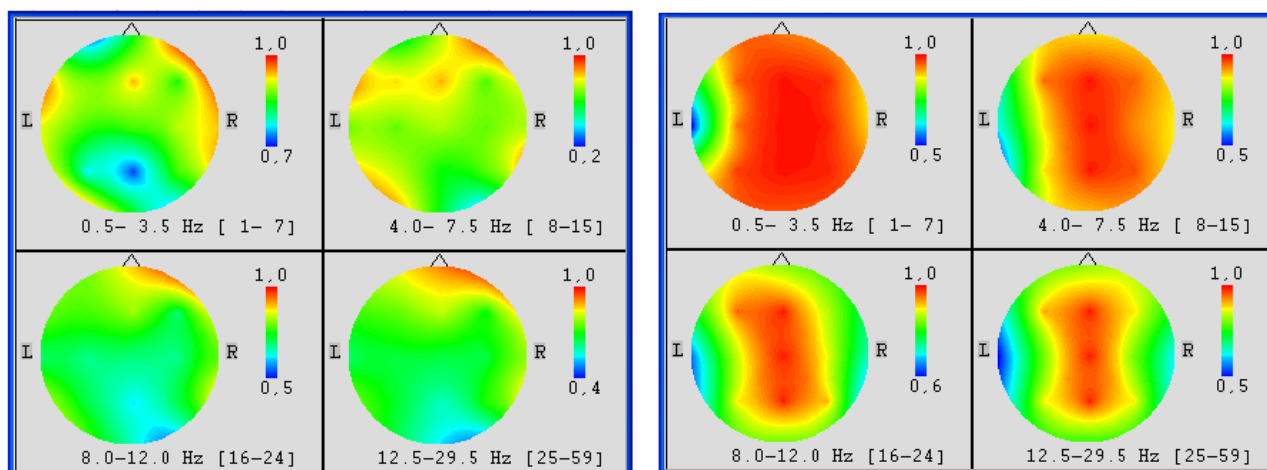
Obr. 50: Lokální koherence

a výsledné hodnoty se umístí doprostřed mezi elektrody. Výhoda lokální koherence spočívá v tom, že se počítá vždy ze sousedních hodnot a tím se zvýší citlivost metody.



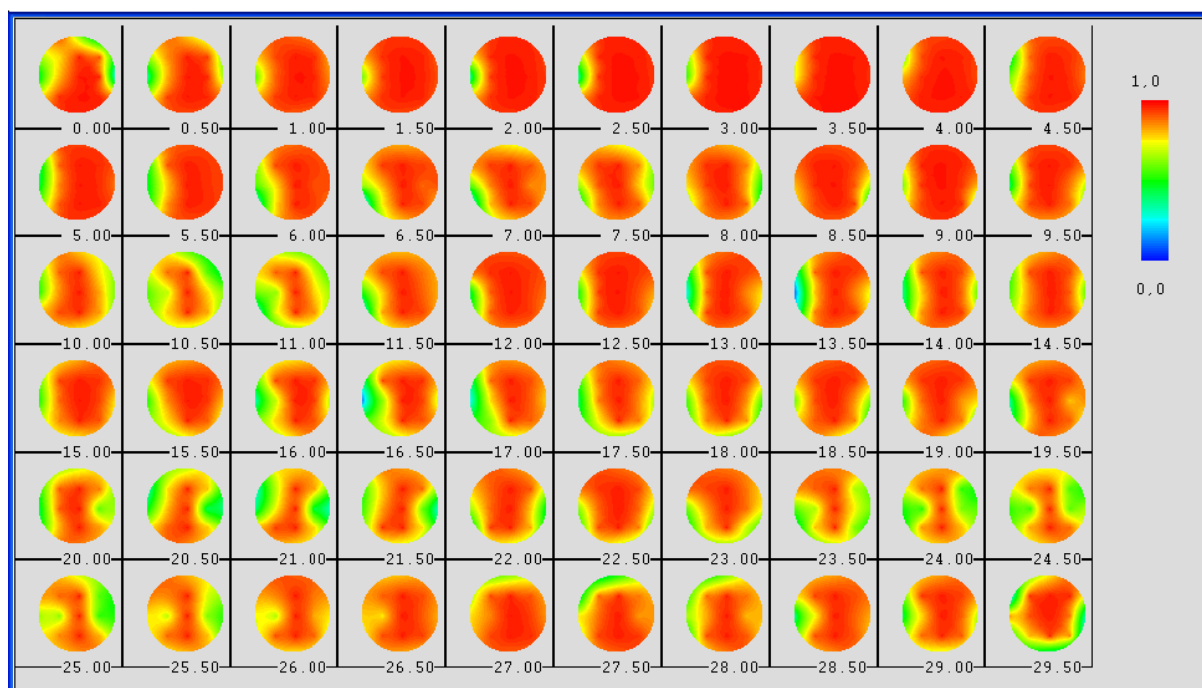
Obr. 51: Příklad koherenčního mapování v prostředí Matlab – v tabulce jsou zobrazeny odečtené hodnoty koherence $\text{COH}(f)$ ze záznamu EEG – neiterované hodnoty jsou barevně podbarveny. Vpravo je zobrazena koherenční mapa pro číselné hodnoty z tabulky – hodnoty jsou uvedeny pro $f = 7$ Hz

Příklad detailního mapování koherence je ukázán na obr. 52 pro stejný časový interval jako v obr. 44. V. Na obr 52 a) je ukázka lokální koherence, na obr. 52 b) pak interhemisferální koherence a na obr. 52c) je opět souhrn interhemisferálních map pro jednotlivé frekvence.



a)

b)



c)

Obr 52: a) Lokální koherence

b) Interhemisferální koherence

c) souhrn interhemisferálních map pro jednotlivé frekvence

□ Topografické mapování fáze

Podobně lze mapovat také fázové spektrum (kapitola 5.4.2 vztah (5.43) – viz obr. 36). Vychází se ze stejných principů, jako při frekvenčním mapování. Ve zvoleném časovém intervalu, který je pro všechny kanály stejný, vypočteme pro každý kanál fázové spektrum. Vynesením hodnoty fáze pro danou frekvenci ve všech kanálech, získáme hodnoty, které jsou zobrazeny v barevné škále. Postupnou iterací (jako u amplitudového BM) je získána síť bodů

□ Topografické mapování časového zpoždění

Měření velmi malých časových rozdílů mezi jednotlivými kanály (viz kap. 5) je obtížný úkol a vizuální odhad velmi malých posunů v zápisu jednotlivých kanálů je nemožný.

Gotman [8] se při svých pokusech na zvířatech snažil lokalizovat místo vzniku epileptického záchvatu s použitím penicilinového modelu (epileptické záchvaty vyvolával penicilinovou injekcí přímo do stanoveného místa mozku). Vypracoval postup měření časových zpoždění mezi jednotlivými kanály. Vycházel z předpokladu, že pokud existuje epileptické ohnisko, pak vzruchu, který se z něho šíří, bude trvat delší dobu, než se dostane ke vzdálenějšímu místu (elektrodě) na povrchu lebky. K elektrodám nejbližším (vůči ložisku) pak vzruch nemá tak velkou vzdálenost a časový rozdíl je úměrně menší (i pokud vezmeme do úvahy nehomogenitu tkáně).

Popis metodiky

Při měření malých časových rozdílů Δt mezi dvěma EEG signály (kanály) $x(n)$ a $y(n)$ vycházíme ze spektrální analýzy signálu. Pro odhad spektra je použit běžný algoritmus FFT [5], [6], [4], [5], [6], [7], [8]. Z důvodů stacionarity je při výpočtech omezen konečný interval pozorování T a signál byl periodicky rozšířen. Díky tomu může být při prohlížení signálu zvolen libovolný datový úsek (část EEG) a v něm určeno okamžité spektrum, spektrální výkonová hustota nebo udělána korelační analýza.

Postup analýzy

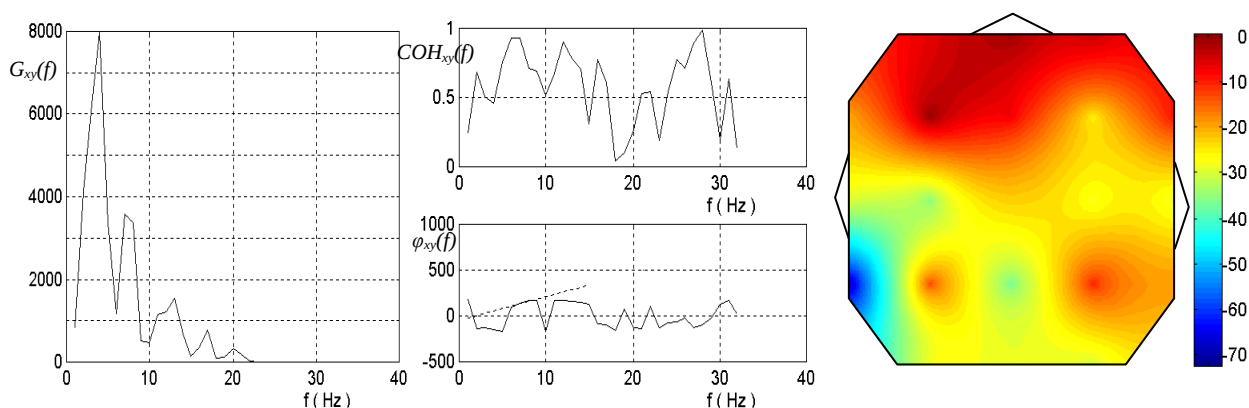
- Prvním krokem analýzy je rozdělení elektrod na levou a pravou hemisféru. Za referenční elektrody jsou považovány elektrody FPZ, FZ, CZ, PZ a OZ ($FPZ = 1/2(FP1+FP2)$, $OZ = 1/2(O1+O2)$).
- Aby byl vyloučen vliv různého zesílení dvou testovaných signálů a potvrzena přítomnost epileptických událostí – např. hrot – vlna (1,8 – 4,5 Hz) nebo ostré hroty (délka trvání 20 – 80 ms) – je vypočteno křížové spektrum (5.41). Křížová spektra v jednotlivých laterálních řadách jsou počítána vzhledem k příslušným referenčním elektrodám.
- Pomocí křížového spektra určíme fázové spektrum (5.43) a koherenci (5.51).
- Z fázové charakteristiky určíme pomocí regresní přímky (5.11) fázový sklon. Podle vztahu (5.14) je také vypočten stupeň spolehlivosti regresního odhadu r_{xy} . Fázový sklon je počítán jen tam, kde jsou alespoň čtyři body zjištěné fázové charakteristiky shodné s regresní přímkou (frekvenční rozlišení je 0,5 Hz – minimální rozsah 2 Hz). Další podmínkou pro výpočet fázového sklonu je dostatečná koherence, tj. blízká 1. Jsou uvažovány pouze ty hodnoty frekvence, které jsou přítomné v obou kanálech a jejich koherence je větší než 0,7 (míra koherence je dost důležité vodítko při rozhodování).

Za oblast epileptického ohniska je považována hodnota s největší kladnou hodnotou zpoždění Δt .

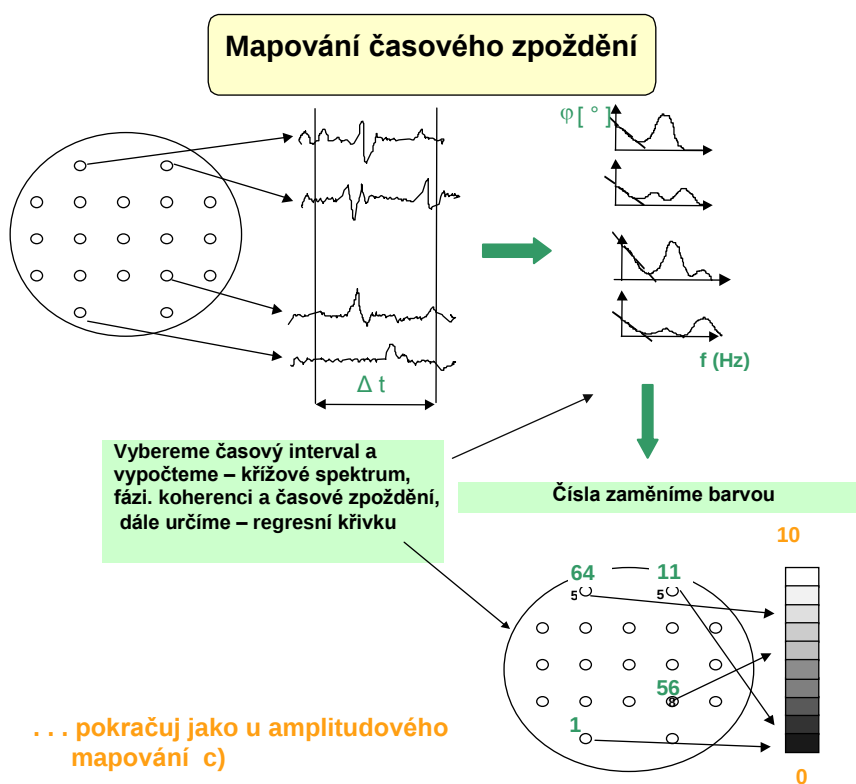
- V dalším kroku je udělána transformace – největší kladná hodnota je posunuta do „nuly“ ($COH_{xy} = 1$, $\Delta\varphi = 0$, $\Delta t = 0$) a znovu je proveden výpočet kroků b) až d) vzhledem k této elektrodě. Všechny ostatní elektrody by měly být oproti této elektrodě zpožděny (záporné hodnoty).

Časové zpoždění Δt dvou signálů je určeno z fázového zpoždění $\Delta\varphi$ (viz – kap. 5 – vztah 5.56).

Časové zpoždění mezi jednotlivými kanály lze opět zobrazit pomocí topografické mapy – viz obr 53. Princip mapování časového zpoždění je zobrazen na obr. 54.



Obr. 53: Příklad mapování časového zpoždění v prostředí Matlab – vlevo je zobrazeno křížové spektru - $G_{xy}(f)$, koherence $COH_{xy}(f)$ a fázové spektrum $\varphi_{xy}(f)$.



Obr. 54: Mapování časového zpoždění



CD-ROM

Otevři soubor BM_amplitud, spust' animaci prezentace 1

Otevři soubor BM_frekv, spust' animaci prezentace 2_10

Otevři soubor CSA_BM, spust' si animaci prezentace 7

**Otázky 6**

1. Jaký je princip metody CSA?
2. Získáme novou informaci při použití metody CSA?
3. Získáme novou informaci při použití metody topografického mapování?

**Korespondenční úkol**

V programu Matlab vytvořte program pro načtení alespoň jednoho kanálu EEG, vypočtete jeho spektrální výkonovou hustotu. Výsledky zobrazte metodou

- a) CSA
- b) topografickým mapováním frekvence

**Text k prostudování**

- [1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005

**Další zdroje, použitá literatura**

- [2] Proakis, J.G., Manolakis, D.G.: Introduction to Digital Signal Processing. Macmillan Publishing Company, New York, 1988 (ISBN 0-02-396815-X)[2]
- [3] Mitra, S.K., Kaiser, J.F.: Digital signal Processing. 1 John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993 (ISBN 0-471-61995-7)
- [4] Uhlíř, J., Sovka, P.: Číslicové zpracování signálů. Vydavatelství ČVUT, Praha 1995, (ISBN 80-01-01303-0)
- [5] Jan, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT Brno, 1997, (ISBN 80-214-0816-2)
- [6] Kay, S.M., Marple, S.L.: Spectrum Analysis – A Modern Perspective, Proc. IEEE, vol. 69, 1981, pp. 1380-1419
- [7] Cooley, J.W., Tukey, J.W. An algorithm for the machine computation of Complex Fourier Series, Math.Comp. vol.19, 1965, pp. 297-301
- [8] Gotman, J.: Measurement of small time differences between EEG channels: Method and application to epileptic seizure propagation, Electroenceph. Clin. Neurophysiol., 56, 1983, pp. 501-514
- [9] Bickford R.G., et al., Application of compressed spectral array in clinical EEG, in Automation of Clinical Electroencephalography, P.Kellaway, and I. Petersen, Eds., New York, Raven, 1973, pp.55-64
- [10] Dumermuth G., Fundamentals of spectral analysis in electroencephalography, In: A. Rémond (Ed.), EEG Informatics : A Didactic Review of Methods and Applications of EEG data Processing. Elsevier, Amsterdam, 1977, pp. 83-105
- [11] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc., 2000 Reference

7. METODY UMĚLÉ INTELIGENCE



Čas ke studiu: 2x 2 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- základní pojmy umělé inteligence
- určit středy jednotlivých tříd
- aplikovat shlukovou analýzu na biologické signály
- klasifikovat biologické signály



Pojmy k zapamatování 7

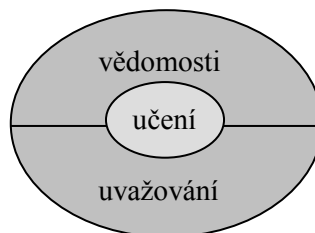
Struktura dat, shluková analýza, metoda k-means středů, třída, těžiště, optimum, Euklidova vzdálenost, příznak, obraz, klasifikátor, učící se klasifikátor, *k*-NN klasifikátor.



Výklad

Umělá inteligence (artificial intelligence, AI - [54]) je metodika, jejímž cílem je vývoj modelů a algoritmů, které od strojů požadují řešit úlohy, které by vyřešil jen člověk se znalostmi. Systémy, které jsou považované za systémy umělé inteligence – viz obr. 43, musí splňovat požadavky:

- uložit znalosti (knowledge representation)
- aplikovat znalosti řešení problému – uvažování (reasoning)
- během experimentu získat nové znalosti – učení (learning)



Obr. 55: Hlavní komponenty všeobecného systému umělé inteligence

Systémy umělé inteligence (AI) můžeme rozdělit do dvou základních kategorií

- a) Symbolická AI – zde řadíme expertní systémy, logické systémy
- b) Výpočetní AI – neuronové sítě, evoluční algoritmy, fuzzy logika atd.

Mezi metody učení umělá inteligence řadíme:

- tvorba rozhodovacích stromů
- tvorba rozhodovacích pravidel
- tvorba asociačních pravidel
- neuronové sítě
- genetické algoritmy

- bayesovské sítě
- učení založené na analogii
- induktivní logické programování

V našem kurzu se budeme zabývat algoritmy neuronových sítí.

Umělé neuronové sítě (NN – Neural Networks) můžeme využít při řešení úloh v oblasti:

- ♦ predikce
- ♦ klasifikace do tříd, klasifikace situací (rozpoznávání)
- ♦ asociace, simulace paměti
- ♦ optimalizace
- ♦ filtrace
- ♦ řízení procesu
- ♦ a další

Predikce znamená předpovídání výstupní hodnoty veličiny na základě jejího průběhu v minulosti. Při predikci jde o to, abychom v průběhu nějaké známé číselné řady, jejíž hodnoty se mění v závislosti na nezávisle proměnném parametru sledovaného jevu našli co nejpravděpodobnější průběh nezávislé proměnné.

Rozpoznávání je rozhodování na základě vstupního vektoru o tom, do které kategorie předmět, popsaný daným vektorem, zařadit. Někdy se místo rozpoznávání mluví o klasifikaci.

Asociace je podobná klasifikaci. Umělá neuronová síť se učí na bezchybných datech a klasifikuje data poškozená.

7.1. Základní pojmy teorie učení

Učení je základní a podstatnou vlastností umělé inteligence. Tato vlastnost ji odlišuje od doposud známého používání počítačů – zde vytváříme algoritmus, podle kterého probíhá výpočet. U těchto algoritmů neexistují fáze učení. U neuronových sítí má navržený algoritmus dvě fáze – adaptivní a aktivní. V adaptivní fázi se síť učí, v aktivní vykonává naučenou činnost. Vhodnost tohoto algoritmu definuje kvalitu a rychlost učení na předkládaných reprezentativních datech. Schématické rozdělení základních modelů a algoritmů tohoto procesu je uvedeno na obr. 44.

- ♦ **Adaline** – klasická umělá neuronová síť perceptronovského typu s binárními výkonnými prvky. Jejich váhy jsou nastavitelné a učení probíhá tzv. delta pravidlem.
- ♦ **Adaptace** – schopnost umělé neuronové sítě k samoorganizaci. Realizuje se obvykle změnami vah během učení.
- ♦ **Aktivita neuronu** – stav jedné buňky. Je funkcí váženého součtu jeho vstupů, prahu a dosavadní aktivity. Počítá se z ní hodnota jeho výstupu. Ve stejném významu se používá i pojem vnitřní potenciál neuronu.
- ♦ **Asociativní učení** – metoda učení umělé neuronové sítě. Vstupní vektor sítě je v tomto případě i jejím vektorem výstupním. Neuronová síť se učí tím, že asociuje vstupní vektor se sebou samým.
- ♦ **Architektura** – struktura sítě výkonných prvků, jejich vzájemné propojení.
- ♦ **ART** – Adaptivní rezonanční teorie. Umělá neuronová síť vyvinutá S. Grossbergem. Má zpětno-vazební charakter. To znamená, že mezi vstupy neuronů ve vrstvě jsou i výstupy z téže vrstvy. Tento typ neuronové sítě byl vyvíjen podle biologického vzoru a díky speciální architektuře má zajímavé vlastnosti. Patří mezi ně zejména fakt, že jednou naučené vzory už zůstávají během učení dalších stabilní, síť se nedoučuje.

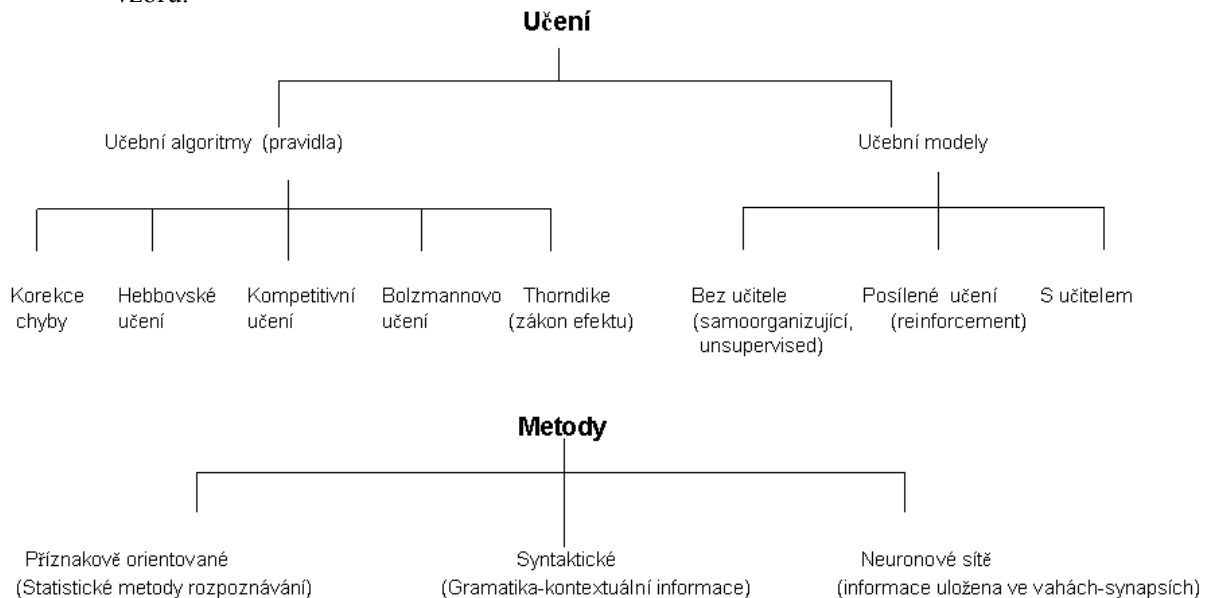
- ♦ **Axon** – výstup neuronu. Je mohutně rozvětvený a prostřednictvím synapsí vysílá signály do jiných neuronů.
- ♦ **Back-propagation** (zpětné šíření) – učící algoritmus vícevrstvých dopředných (nerekurentních) neuronových sítí. Při něm se chyba výstupní vrstvy zpětně přepočítává do předchozích vrstev (zpětně se šíří) a podle její hodnoty se upravují jednotlivé váhy.
- ♦ **Bázový prvek** – jeden z prvků umělé neuronové sítě, který je stále aktivní. Jeho výstup se přivádí (vynásobený příslušnou vahou) do všech ostatních výkonných prvků jako jejich práh.
- ♦ **Binární neuron** – výkonný prvek, jehož výstup nabývá právě jedné ze dvou různých hodnot (aktivní, neaktivní).
- ♦ **Cílový vektor** – žádaný výstupní vektor patřící k nějakému vektoru vstupnímu. Tento vektor musí být při učení s učitelem znám.
- ♦ **Delta pravidlo** – pravidlo pro učení s učitelem, u kterého se změnou vah dosahuje stále se zmenšujícího rozdílu mezi žádanou a skutečně dosaženou hodnotou výstupu.
- ♦ **Dopředná (nerekurentní) síť** – moderní vícevrstvá a částečně samoorga-nizující se síť. Samostatně klasifikuje vstupní vektory tak, že jim přiřazuje odpovídající výstupní hodnoty. Je v ní jednoznačně definován informační tok. V takové síti neexistují spoje mezi neurony z vyšších vrstev zpět do vrstev nižších, dokonce ani spojení mezi neurony v téže vrstvě.
- ♦ **Dynamika** – pravidlo, na jehož základě jednotlivé výkonné prvky neuronové sítě mění svůj stav. Patří k nim vstupní funkce, aktivační (výstupní) funkce neuronů, jakož i předpis pro posloupnost výpočtů jednotlivých výstupů.
- ♦ **Excitace** – je takové působení aktivního neuronu, že při něm v připojených neuronech dochází k růstu jejich vnitřního potenciálu.
- ♦ **Energetická funkce** – energie je mírou naučenosti, tedy odchylky mezi skutečnými a požadovanými hodnotami výstupů neuronové sítě pro danou trénovací množinu.
- ♦ **Genetické algoritmy** – jsou inspirovány přirozeným chováním přírody, v níž probíhá evoluční vývoj. Algoritmy jsou založeny na práci s velkým množstvím jedinců (vyvíjených systémů), na tzv. populacích. Nové generace se neustále vytvářejí křížením a mutací existujících jedinců. Pro zařazení nově vzniklého systému do nové generace a pro výběr jedinců vhodných pro křížení je brán zřetel na určité výběrové hledisko. Podle něj dochází k určitému zkvalitňování populace.
- ♦ **Hammingova síť** – optimální minimální! klasifikátor.
- ♦ **Hebbovské učící pravidlo** – původní učící předpis pro učení bez učitele. Je analogií průběhu učení v lidském nervovém systému. Přeneseno do umělých neuronových sítí říká, že častější používání toho-kterého spoje posiluje jeho hodnotu váhy. K této základní formulaci existuje mnoho variant. .
- ♦ **Heteroasociativní učení** – je učení s učitelem. Vstupní vektor neuronové sítě se v tomto případě od žádaného výstupu liší. Pro učení musí být žádaný výstupní vektor k dispozici.
- ♦ **Hopfieldova síť** – zpětnovazební symetrická neuronová síť s binárními neurony. Používá se zejména k identifikaci zašuměných vstupních vzorů.
- ♦ **Inhibice** – je opakem excitace. Buňka má inhibiční chování je-li v aktivním stavu a snižuje-li vnitřní potenciál v neuronech, které jsou s ní spojeny.
- ♦ **Kohonenova síť** – samoorganizující se síť, tj. nepotřebuje k trénování učitele.
- ♦ **Kompetice (soutěžení)** – situace, kdy si několik neuronů vzájemně konkuruje. Ve fázi učení se u vítězného neuronu zvýší hodnoty vah a u jeho konkurentů se naopak váhy sníží. Ve vybavovací fázi se aktivita vítěze zvýší o příspěvky jeho soupeřů.

- ♦ **Kompetiční učení** – učicí pravidlo, ve kterém si výkonné prvky při předkládání vstupních vzorů vzájemně konkurují. Váhy se pak mohou měnit pouze u vítězného neuronu.
- ♦ **Lineární asociátor** – je jednoduchá lineárně pracující síť, jejíž matici vah vypočítáváme podle Hebbovského pravidla učení. Představuje nejjednodušší formu dělené asociativní paměti.
- ♦ **Madaline** – je o jednu vrstvu rozšířena síť Adaline. Má zvláštní metodu učení, protože na rozdíl od Adaline obsahuje jednu skrytou vrstvu.
- ♦ **Neuron** – buňka nervového systému. Neuron je anatomicky i funkčně základním stavebním kamenem nervového systému a posloužil jako vzor pro výkonný prvek v umělých neuronových sítích.
- ♦ **Neuronová síť** – počítačová architektura podobná mozku. Proti klasickým počítačům má celou řadu výhod: je odolná proti chybám, má schopnost učit se, dovede abstrahovat i generalizovat.
- ♦ **Obousměrná asociativní paměť** – dvouvrstvá síť s binárními výkonnými prvky a symetrickým propojením. Je zobecněním Hopfieldovy sítě. Díky zpětnovazebnímu propojení se mezi vrstvami dosahuje rezonance a síť po jisté době dosáhne stabilního stavu.
- ♦ **Perceptron** – jednoduchá dopředná síť bez skrytých vrstev. Tzn., že jen jednu vrstvu této sítě lze učit. Klasickou hranici schopnosti perceptronu je XOR-problém.
- ♦ **Práh** – hodnota, kterou musí součet všech vážených vstupů neuronu překročit, aby se stal aktivním.
- ♦ **Problém obchodního cestujícího** – kombinatorická úloha, ve které se hledá nejkratší cesta předem známým počtem míst. S tímto problémem se setkáváme v řadě nejrůznějších oborů.
- ♦ **Přeučování** – učicí proces, ve kterém se maže jistý počet vah. V kontrastu k normálnímu učení už při přeučování síť jistý objem vědomosti obsahovala.
- ♦ **Rozpoznávání vzorů, obrazů** – rozpoznávání naučených vzorů v zašuměných vstupních datech. Vstupní i výstupní data se obvykle prezentují vektorovou formou.
- ♦ **Rozpoznávání znaků** – interpretace vizuálních symbolů. Rozpoznávání číslic, alfabetských znaků nebo jiných, třeba i ručně psaných, symbolů. Jde sice o klasický, ale velmi složitý problém.
- ♦ **Samoorganizace** – schopnost neuronové sítě učením přizpůsobit své chování k vyřešení daného problému.
- ♦ **Shluk** – skládá se z „podobných“ objektů – tříd.
- ♦ **Schopnost asociace** – vlastnost neuronové sítě odhalit podobnosti mezi naučenými vzory a vstupními daty.
- ♦ **Sumační funkce** – část výkonného prvku, která sčítá vážené vstupní signály.
- ♦ **Synapse** – místo styku mezi dvěma neuronovými buňkami v organismu. Během učení se jeho parametry mění.
- ♦ **Učení** – přizpůsobování nebo adaptace neuronové sítě daným požadavkům. Váhy na spojích mezi jednotlivými výkonnými prvky sítě se mění podle nějakého učicího algoritmu.
- ♦ **Učení bez učitele** – při tomto způsobu učení nemá systém žádnou podporu z vnějšku. Celé učení je založeno pouze na informacích, které samotná síť získala během celého procesu učení.
- ♦ **Učení s učitelem** – učení, při kterém se neuronová síť trénuje z vnějšku. "Učitel" zadává vstupní i výstupní vektor dat, vyhodnocuje výsledek a provádí změny.

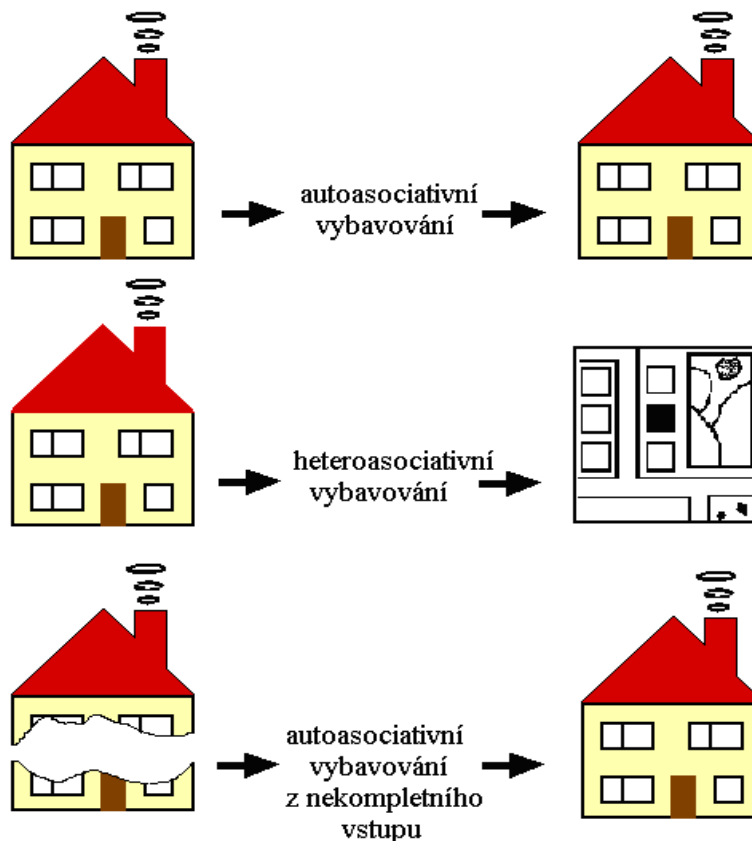
- ♦ **Učící fáze** – časový interval, během kterého se podle nějakého učícího algoritmu mění parametry sítě a tyto se do sítě nahrávají.
 - ♦ **Učící krok** – reálné číslo mezi 0 a 1, které udává, jak silně se jednotlivý učící krok ve změně vah projeví. K tomu, aby se naučený vzor zrušil, lze použít negativní hodnoty tohoto parametru.
 - ♦ **Učící pravidlo (algoritmus)** – předpis, který udává, jak se budou síti předkládat vzory k učení a jak se budou vypočítávat změny vah.
 - ♦ **Váha** – hodnotou vyjádřena míra vazby mezi dvěma spojenými výkonnými prvky. Jejím prostřednictvím se v síti předávají informace. Paměť sítě představují právě tyto váhy, resp. Jejich velikosti.
 - ♦ **Vážený vstup** – součin výstupního signálu jiného neuronu a váhy tohoto spoje. Tento příspěvek vstupuje do součtu se všemi ostatními váženými vstupy konkrétního neuronu a vytváří s nimi jeho nový vnitřní potenciál.
 - ♦ **Vrstva** – základní komponenta architektury neuronové sítě. Vrstvu tvoří jistý počet stejných buněk majících v síťové struktuře identickou funkci.
 - ♦ **Vybavovací fáze** – časový interval, ve kterém neuronová síť na základě předchozího naučení generuje výstupní data jako odezvu na data vstupní. Vybavování může mít jednu ze dvou variant – obr. 57:
 - a) **autoasociativní** vstup a výstup systému je stejný. Využití autoasociace je když vstupní vektor není kompletní – viz obr 57 c).
 - b) **heteroasociativní**
 - ♦ **Výkonný prvek (neuron)** – základní procesorový prvek neuronové sítě. V lidském mozku mu odpovídá jedna neuronová buňka.
 - ♦ **Výstupní funkce (přenosová funkce)** – část výkonného prvku zajišťující výstup vnitřního potenciálu (aktivity) na další neurony. Někdy je vnitřní potenciál a výstup neuronu identický.
 - ♦ **Zobecňování** – schopnost neuronové sítě na základě naučených vzorů odpovědět i na vzor, který nebyl součástí učící množiny.
 - ♦ **Zpětná vazba** – zvláštní propojení výkonných prvků podobné např. kruhu, kdy se informační tok znovu vrací ke svému výchozímu bodu.
 - ♦ **Zpětnovazební síť** – síť, ve které nelze jednoznačně definovat směr informačního toku. Jednotlivé vrstvy zde nemají jednoznačně definovanou hierarchii. Síť obsahuje zpětné vazby mezi buňkami nebo skupinami buněk.
 - ♦ **Příznak** – veličina popisující jednu vlastnost zkoumaného objektu; objekt může být charakterizovaný více příznaky. Obvykle se příznak vyjadřuje číselnou hodnotou – pomocí reálných, celých nebo binárních čísel
 - ♦ **Příklad** – popis objektu, který je předmětem našeho zájmu, pomocí číselných hodnot – příklad je vlastně n -rozměrný vektor, kde n vyjadřuje počet příznaků daného objektu
 - ♦ **Příkladový prostor Y** – je množina příkladů
 - ♦ **Reprezentativní vzorek s** – prvek množiny $Y \times \{0, 1\}^m$, kde m je počet příkladů ve vzorku. Tzn., že reprezentativní vzorek představuje množinu uspořádaných dvojic $s = ((y_1, d_1), (y_2, d_2), \dots, (y_m, d_m))$. $d_i \in \{0, 1\}$ představují adekvátní výstupy k jednotlivým vstupům. V praxi výstupy d_i nemusí být binární hodnoty. Reprezentativní vzorek poskytuje empirické údaje chování systému, který neznáme. Pomocí poznání vstupů a výstupů systému se snažíme poznat chování systému
- Reprezentativní vzorek je nesporný, když žádné dva příklady ve vzorku nejsou sporné, tj. když $y_i = y_j \leftrightarrow d_i = d_j$. Reprezentativní vzorek dělíme do dvou základních skupin:

- a) **trénovací vzorek** – je to množina uspořádaných hodnot, která se používá ve fázi učení. Jestliže není tato množina vhodně vybraná – nebude učení kvalitní. Tyto data by měla popisovat komplexní chování systému
- b) **testovací vzorek** – je to množina uspořádaných hodnot, která se používá v aktivní fázi k otestování získaných znalostí během učení.

Abychom mohli rozhodnout zda testovaný vzor patří do dané třídy, potřebujeme zjistit vzdálenost mezi vzorem a třídami. Měření této vzdálenosti umožňuje zjistit míru podobnosti vzorů.



Obr. 56: Základní modely a algoritmy učení



Obr. 57: Autoasociativní a heteroasociativní neuronová síť

- ♦ **Podobnost** dvou objektů $x_j, x_k \in X$ je nezáporná reálná funkce $s: X \times X \rightarrow R^+$, pro kterou platí (označme $s(x_j, x_k) = s_{jk}$)

$$\begin{aligned} s_{jk} &= s_{kj}, \quad \text{kde } 1 \leq j, k \leq N \\ s_{jk} &\geq 0 \\ s_{jk} &\leq s_{jj} = 1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Takže pro nejméně podobné objekty platí $s_{jk} = 0$ a pro nejvíce podobné platí $s_{jk} = 1$. $N \times N$ matici (s_{jk}) budeme nazývat matice podobnosti.

Duálním pojmem podobnosti je vzdálenost, která je definovaná:

- ♦ **Vzdálenost** dvou objektů $x_j, x_k \in X$ je nezáporná reálná funkce $d: X \times X \rightarrow R^+$, pro kterou platí (označme $d(x_j, x_k) = d_{jk}$)

$$\begin{aligned} d_{jk} &= d_{kj}, \quad \text{kde } 1 \leq j, k \leq N \\ d_{jk} &\geq 0 \\ d_{jj} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

$N \times N$ matice (d_{jk}) se nazývá matice vzdálenosti. Platí-li trojúhelníková nerovnost, $d_{jk} \leq d_{ji} + d_{ik}$ jedná se o metriku. Nejužívanější jsou:

- **Hammingova vzdálenost:**

Máme dva binární vektory – každý z těchto vektorů reprezentuje jeden vzor:

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2, \dots, a_N), \\ B &= (b_1, b_2, \dots, b_N) \end{aligned}$$

Prvky těchto vektorů jsou jednotlivé elementy daného vzoru. Počet těchto elementů ve vzoru je N . Hammingova metrika hledá rozdíly mezi jednotlivými elementy, celková vzdálenost je pak součet absolutních hodnot těchto rozdílů:

$$H = \sum_{i=1}^N |a_i - b_i| \quad (7.3)$$

Výpočet se dá zjednodušit použitím binární operace XOR. Platí

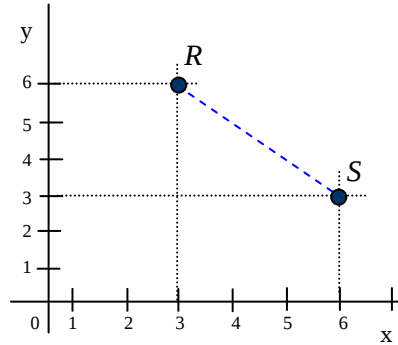
$$|a_i - b_i| = a_i \text{ XOR } b_i \quad (7.4)$$

- **Euklidova vzdálenost**

Je nejpoužívanější metrika. Máme kartézský souřadný systém, ve kterém jsou vektory A , B . Vzdálenost pro dvourozměrný případ je zobrazena na obr. 58 přerušovanou (modrou) čarou. Pro libovolnou dimenzi prostoru platí:

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^N (A(i) - B(i))^2}, \quad \text{kde } N \text{ je dimenze prostoru} \quad (7.5)$$

Pro názornost příklad ve dvourozměrném prostoru – viz obr. 58. Vzdálenost bodů $R(x_R, y_R)$ a $S(x_S, y_S)$



Obr. 58: Měření Euklidovy vzdálenosti

$$E(R, S) = \sqrt{(x_R - x_S)^2 + (y_R - y_S)^2} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{18} = 4,2426$$

- **Bloková vzdálenost (Manhattan)**

Je to zjednodušená verze Euklidovy vzdálenosti $M = \sum_{i=1}^N |A(i) - B(i)|$ (7.6)

- **Čtvercová vzdálenost**

Je opět zjednodušení Euklidovy vzdálenosti. Za míru vzdálenosti bere největší rozdíl mezi jednotlivými elementy vektorů:

$$C = \max_i |A(i) - B(i)| \quad (7.7)$$

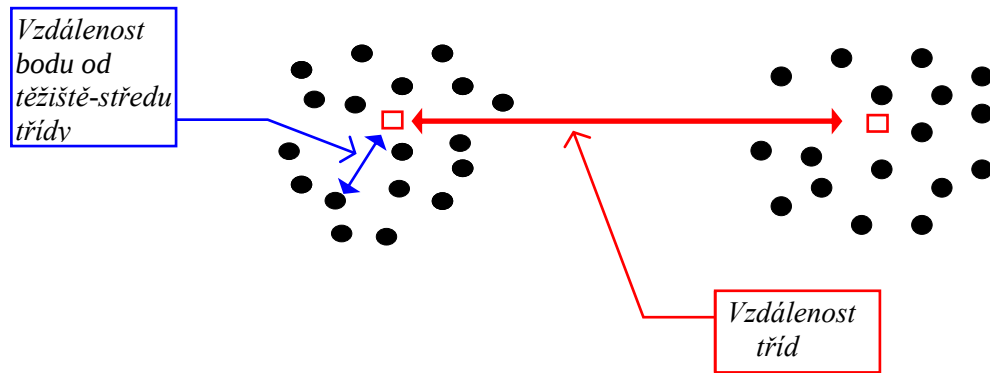
- **Mahalanobisova vzdálenost**

$$d_{jk} = \sqrt{(A(i) - B(i))W^{-1}(A(i) - B(i))^T} \quad (7.8)$$

kde $A(i)$ je i -tý řádek matice dat a W je výběrová kovarianční matice. Mahalanobisova vzdálenost zahrnuje korelaci mezi příznaky a standardizuje každý příznak tak, aby měl nulovou střední hodnotu a jednotkovou varianci. Další podrobnosti o výběru příznaků, jejich standardizaci, o řešení případu chybějících dat apod. lze najít v [2], [3].

- **Vzdálenost mezi třídami**

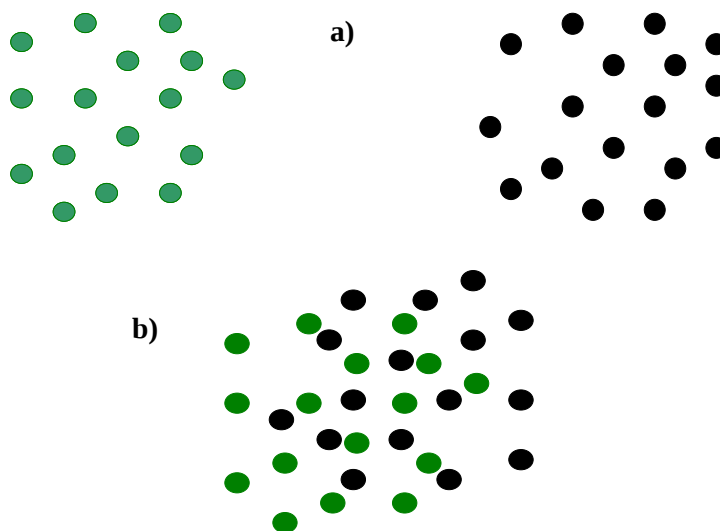
Představíme-li si objekty jako body v p -rozměrném prostoru, libovolná třída C_i může být reprezentována těžištěm těchto bodů. Těžiště představuje aritmetický průměr objektů třídy. Vzdálenost tříd měříme jako vzdálenost těžišť – viz obr. 59.



Obr. 59: Vzdálenost mezi třídami

7.2. Shluková analýza – Cluster Analysis

Je příznakově orientovaná metoda učení bez učitele (nemáme žádnou apriorní informaci o objektech), jenž je využívána k rozpoznávání obrazů (pattern recognition). K identifikaci zkoumaných objektů používá podobnosti (resp. nepodobnosti – vzdálenosti) mezi objekty [1], [2]. Data – objekty jsou popsány n -rozměrnými příznaky. Shluková analýza hledá přirozenou strukturu dat – viz obr. 60,



Obr. 60: Příklad shluků ve dvourozměrném prostoru:

- a) existuje “přirozená” struktura dat – aplikujeme shlukovou analýzu
- b) struktura dat neexistuje – neaplikujeme shlukovou analýzu

a jejím úkolem je roztržidění zkoumaného souboru objektů do homogenních (stejnorodých) tříd. Což je velká výhoda shlukové analýzy, pokud pracujeme s neznámými objekty klasifikace. Nevýhoda shlukové analýzy spočívá v tom, že neumožňuje on-line klasifikaci. Nelze totiž shlukovat objekty, které teprve přijdou (např. během snímání pacienta).

7.3. Klasifikace metod shlukové analýzy

- podle matematického aparátu
 - deterministické

- statistické
- fuzzy
- z hlediska zpracování dat
 - paralelní (všechna data v každém kroku)
 - sekvenční (menší části souboru)
- podle sdílení členství v různých třídách
 - disjunktivní (překrývající se, jeden objekt může patřit současně do více tříd)
 - nedisjunktivní
- podle typu shlukovacího kritéria
 - metody nehierarchické
 - metody hierarchické
 - na základě teorie grafů
 - optimalizující kritériální funkci

□ Obecný model shlukové analýzy

Shlukovou analýzu je možné definovat jako metodu klasifikace, kdy

- a) Sémantika problému klasifikace je dána podobnostmi mezi objekty
- b) Objekty jsou popsány měřeními (příznaky)
- c) Není dána a priori informace (trénovací množina)
- d) Označení (identifikace objektů) je určeno procesem shlukování

Proces shlukování sestává obecně z použití tří základních funkcí [3]:

Funkce počátečního popisu dat

Může být dána:

- počáteční strukturou dat
- mírami podobnosti vypočtenými z počáteční struktury dat
- jmény (označeními) přiřazenými počáteční struktuře dat

Funkce symbolického popisu

Provádí redukci (abstrakci) informace – potlačení nepodstatných detailů a zachování důležitých vlastností.

Identifikační funkce f

Z počáteční struktury dat a ze symbolického popisu vyplývá identifikace – označení prvků různých tříd. Všechny objekty z dané množiny objektů $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ zde získávají jméno ω z konečné množiny jmen Ω prostřednictvím zobrazení $f: X \rightarrow \Omega$. Tato procedura (algoritmus, program) je umožněna identifikačním operátorem shlukování f . Třídy C_i určené tímto operátorem se nazývají shluky a množina $C = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ tvoří rozklad (rozdělení). Platí pro něj:

$$\begin{aligned}
 C_i &\subset X \\
 \bigcup_{i=1}^K C_i &= X \\
 C_i \cap C_j &= \emptyset
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

C_i se nazývá třídou rozdělení C .

Počáteční popis a reprezentace dat

Objekt $x_k \in X$ z populace $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ je popsán vektorem p měření (příznaků). Výsledkem je řada parametrů $(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kp})$ pro každý klasifikovaný objekt x_k , jež určují počáteční strukturu dat. Množinu příznaků (pozorování, měření, charakteristiky) pro danou populaci označíme $Y = \{y_1, \dots, y_j, \dots, y_p\}$, kde $y_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj})$ představují hodnoty realizací určitého stejného měření na všech objektech. Výsledky p měření na N objektech lze reprezentovat maticí dat x_{kj} dimenze $N \times p$ – obr. 61.

Z hlediska interpretace výsledků hodnot měření mohou být příznaky

- kvantitativní (reálná čísla)
- kvalitativní (barva, jméno nemoci,...)
- binární (pouze dva stavy 0,1)

měření objekty	y_1	y_2	$\dots$	y_p
x_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_k	x_{k1}	x_{k2}		x_{kp}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_N	x_{N1}	x_{N2}		x_{Np}

Obr. 61: Matice dat

Základní problém shlukové analýzy lze také formulovat takto: na množině objektů $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ konstruovat řadu homogenních tříd objektů $C = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ tak, aby “podobné” objekty náležely stejné třídě a “nepodobné”

objekty patřily do různých tříd.

Standardizace dat

Protože se pro příznaky často používají různé fyzikální jednotky, je většinou nutná normalizace a standardizace příznaků, pokud nepoužijeme Mahalanobisovu vzdálenost. Původní data x_{ij}^* se transformují na nová data x_{ij} , kde

$$x_{ij} = \frac{x_{ij}^* - m_j}{s_j} \quad (7.10)$$

m_j je střední hodnota j -tého sloupce (příznaku) pro všechna data a s_j je směrodatná odchylka. Můžeme také normalizovat maximem ve sloupci příznaků.

□ Metody shlukové analýzy

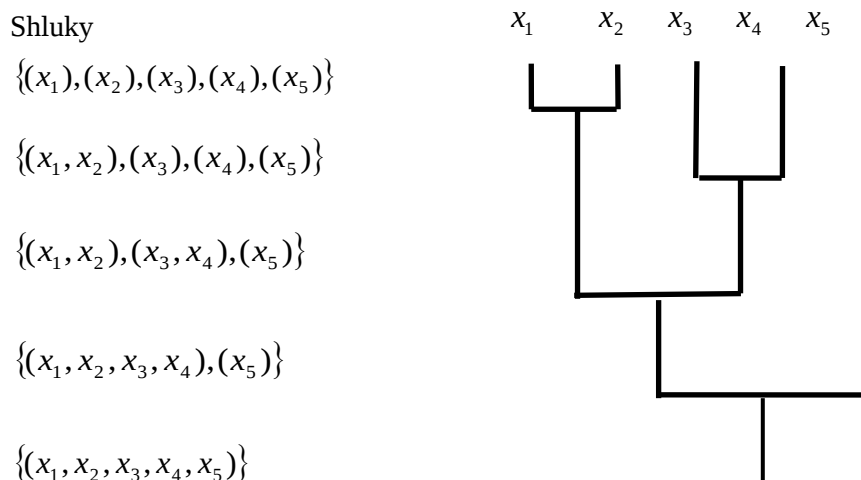
Metody shlukové analýzy můžeme rozdělit na:

- a) hierarchické metody
- b) nehierarchické metody

a) Hierarchické metody shlukové analýzy

Transformují matici vzdálenosti do posloupnosti hierarchicky seřazených “zahnížděných” rozdělení. Graficky jsou popsány dendrogramem – viz obr. 62.

Tyto algoritmy jsou náročné na paměť (je nutné uchovávat v paměti matici vzdálenosti), na dobu výpočtu (zbytečně poskytují třídění i pro úrovně – počty tříd, které nepotřebujeme, od 1 třídy s N objekty až po N tříd s 1 objektem) a byly již překonány modernějšími postupy, například nehierarchickými metodami.



Obr. 62: Příklad dendrogramu

b) Nehierarchické metody shlukové analýzy

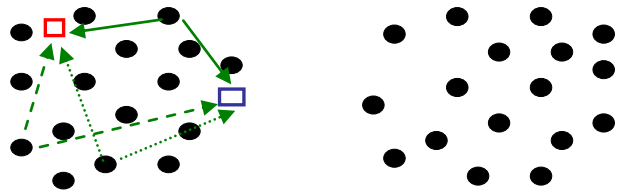
1. Metoda k-středů (k-means)

Tyto metody hledající iterativní optimální rozdělení dat, které minimalizují určitou kritériální funkci. Mezi nejznámější klasické postupy patří různé varianty metod k -středů [2].

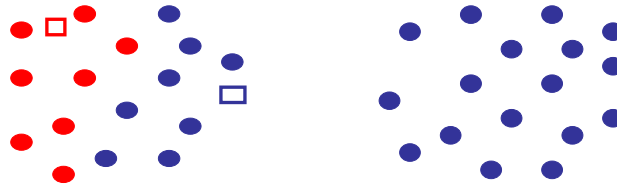
Princip:

1. Začneme s počátečním rozdělením (rozkladem) objektů do K shluků. Počáteční rozdělení lze získat například takto:
 - vezmeme prvních K objektů jako shluky s jedním členem (těžiště třídy)
 - vezmeme náhodně K objektů, apod...
 - náhodně vybereme středy tříd – prototypy (mohou být přímo data)
2. Vypočteme vzdálenosti všech objektů od každého středu
3. Objekt přiřadíme (klasifikujeme) do té třídy, k jejímuž středu má nejbližší (tím se změní těžiště nových tříd).
4. Přepočteme těžiště změněných tříd.
5. Opakujeme krok 2 do konvergence, tedy dokud celý cyklus přes všechna data nezaznamená žádnou změnu členů tříd.

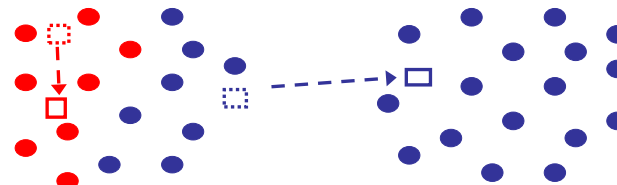
Jako funkci vzdálenosti uijeme například obyčejnou Euklidovskou metriku. Schématicky je princip k -means středů znázorněno na obr. 63.



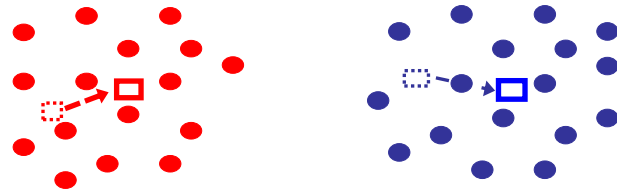
1. Náhodně zvolené středy tříd



2. Zařazení objektů do třídy s nejbližším těžištěm



3. Přepočtení nového těžiště třídy



Nové přiřazení objektů k novému těžišti a opětovné přepočtení těžiště

Obr. 63: Princip shlukové analýzy

Formálně lze obecný tvar tohoto algoritmu zapsat takto:

- ♦ $C^{(0)} = \{C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_K^{(0)}\}$ je libovolné rozdělení množiny objektů $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ do K tříd.

Definujeme rekurentně postup od rozdělení

- ♦ $C^{(n)} = \{C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_K^{(n)}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, K$ rozdělení

$$C^{(n+1)} = \{C_1^{(n+1)}, C_2^{(n+1)}, \dots, C_K^{(n+1)}\} \text{ tak, že platí}$$

$$C_i^{(n+1)} = \left\{ x_k \in X : \|x_k - \bar{x}_{C_i}^{(n)}\| = \min_j \left\{ \|x_k - \bar{x}_{C_j}^{(n)}\| \right\} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, K, \text{ kde } \bar{x}_{C_i}^{(n)} \text{ označuje}$$

těžiště třídy $C_i^{(n)}$

- ♦ Postup opakujeme do konvergence, tedy například dokud se nepřestane měnit členství objektů v jednotlivých shlucích

Variace metody:

- MacQueenova metoda (používá jen 2 průchody – první přiřazovací, druhý definitivní)
- Forgy – jako předchozí, ale postupujeme až do konvergence
- ISODATA – během výpočtu se může měnit počet tříd
- metoda dynamických shluků – umožňuje stanovit typické představitele třídy
- fuzzy k -means algoritmus – viz níže

Počet tříd – cluster validity

Při klasifikaci do tříd, potřebujeme také stanovit optimální počet tříd. Optimální počet tříd můžeme najít:

- výpočtem pro různý počet tříd (2, 3, 4, ...)
- hledáním minima tříd pomocí kritéria. Takovým kritériem může být například poměr mezitřídního rozptylu a vnitrotřídního rozptylu.

Matice vnitrotřídního rozptylu

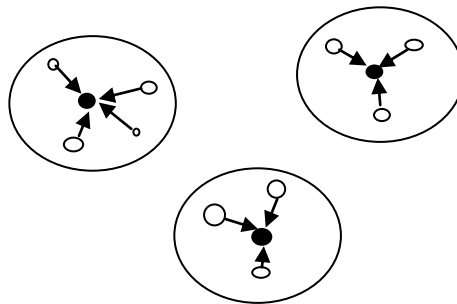
Matice vnitrotřídního rozptylu (within – group scatter matrix) W představuje součet rozptylů jednotlivých tříd

$$W = \sum_{i=1}^K W_i \quad (7.11)$$

kde rozptyl pro třídu C_i s n_i objekty $x^{(i)}$ a středem $\bar{x}_{C_i}$ je

$$W_i = \sum_{k=1}^{n_i} \left\| x_k^{(i)} - \bar{x}_{C_i} \right\|^2 \quad (7.12)$$

Vnitrotřídní rozptyl je znázorněn na obr. 64.



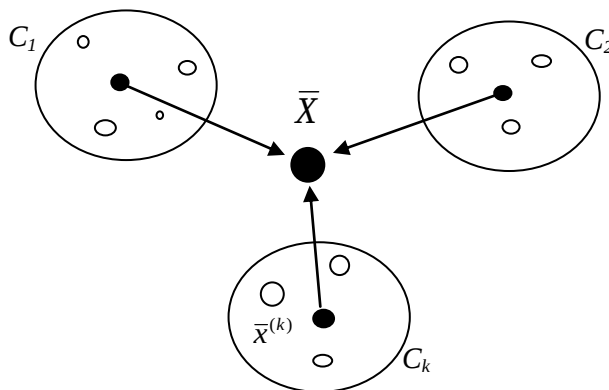
Obr. 64: Znázornění vnitrotřídního rozptylu

Matice mezitřídního rozptylu

Matice mezitřídního rozptylu B (between – group scatter matrix) představuje rozptyl všech průměrů jednotlivých tříd C_i vzhledem k celkovému průměru všech dat $\bar{X}$:

$$B = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} \left\| \bar{x}^{(k)} - \bar{x} \right\|^2 \quad (7.13)$$

Graficky je tato matice ukázána na obr. 65.



Obr. 65: Znázornění mezitřídního rozptylu

Mezi možná kritéria patří pseudo F-statistika [4], kde optimální počet tříd je stanoven maximem funkce

$$PFS = \frac{tr(B)(N - k)}{tr(W)(k - 1)} \quad (7.14)$$

pro rozdělení N objektů do k tříd pro $k = 2, 3, \dots$. Kritéria bývají někdy monotónní, v tom případě je nutné hledat náhlý pokles, skoky ve funkci.

2. Teorie fuzzy množin a shluková analýza

Klasická teorie množin je příliš zjednodušující, neboť podle této teorie prvek může nabývat pouze dvou hodnot – $0 \rightarrow$ prvek nepatří do množiny (třídy), $1 \rightarrow$ prvek patří do množiny (třídy). Taková to klasifikace neumožňuje sdílení členství jednoho objektu v různých třídách.

Mohou nastat problémy s hybridními objekty, které lze přiřadit do různých tříd s různým stupněm příslušnosti. Toto umožňuje teorie fuzzy (nežetelných) množin, neboť podle této teorie prvek patřící do fuzzy množiny může nabývat hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, takže fuzzy množiny dovolují vícenásobné sdílení objektu ve více třídách s různým stupněm členství. Využití fuzzy k-means algoritmus je další variantou metody k-středů [58].

Na základě teorie fuzzy množin je založena fuzzy varianta klasického k -means algoritmu. Nechť $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, je množina objektů. Klasická množina (třída) A může být popsána charakteristickou funkcí $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, která nabývá funkčních hodnot pouze v dvou-prvkové množině $\{0, 1\}$ (patří/nepatří).

Pro třídu i tedy platí:

$$\mu_A(x_k) = \begin{cases} 1 & x_k \in A_i \\ 0 & x_k \notin A_i \end{cases} \quad (7.15)$$

Naproti tomu teorie fuzzy množin, která připouští proměnný stupeň členství v celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a charakteristická funkce nabývá i reálných hodnot :

$$\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle \quad (7.16)$$

Fuzzy členství objektu k ve třídě i pak označíme $\mu_A(x_k) = u_{ik}$ a tvoří prvky matice členství U .

Klasický K -rozklad zkoumaného vektorového prostoru dat V_{KN} (N objektů, K tříd) do navzájem disjunktních tříd je definován jako

$$M_K = \left\{ U \in V_{KN} : u_{ij} \in \{0,1\}, \forall i, j; \sum_{i=1}^K u_{ij} = 1, \forall j; \sum_{j=1}^N u_{ij} : 0, \forall i \right\} \quad (7.17)$$

Fuzzy rozklad M_{fK} zkoumaného vektorového prostoru dat V_{KN} (N objektů, K tříd) je pak definován jako

$$M_{fK} = \left\{ U \in V_{KN} : u_{ij} \in \langle 0,1 \rangle, \forall i, j; \sum_{i=1}^K u_{ij} = 1, \forall j; \sum_{j=1}^N u_{ij} : 0, \forall i \right\} \quad (7.18)$$

a prvky tohoto prostoru mohou na rozdíl od klasického rozkladu sdílet členství v několika třídách.

Fuzzy k -means algoritmy (FCM) vyplývají z minimalizace funkcionálu (kritériální funkce)

$$J_m : M_{fK} \times R^{KN} \rightarrow R^+$$

$$J_m(U, v) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K (u_{ij})^m (d_{ij})^2, \quad m \in \langle 0, \infty \rangle \quad (7.19)$$

kde $U \in M_{fK}$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_K) \in R^{KN}$ a $v_i \in R^p$ jsou interpretovány jako středy fuzzy shluků (popsány p příznaky) a $(d_{ij})^2 = \|x_j - v_i\|^2$ je vzdálenost j -tého prvku shluku od příslušného středu v_i , m je váhový exponent určující stupeň “nezřetelnosti”.

FCM algoritmus:

1. Zadej:
 - počet shluků K ,
 - vyber metriku na R^p ,
 - zadej váhu (stupeň “nezřetelnosti”) m .
 - Inicializuj počáteční rozklad $U^{(0)}$, zvol rozlišovací úroveň pro kritérium konvergence ε_L .

Pro kroky algoritmu $n = 0, 1, \dots$

2. Vypočti fuzzy středy shluků $v_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, K$ podle vztahu

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m x_j}{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m} \quad \forall i \quad (7.20)$$

3. Urči nový rozklad $U^{(n+1)}$ podle

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^K \left(\frac{d_{ij}}{d_{kj}} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad \forall i, j \quad (7.21)$$

4. Porovnej $U^{(n)}$ a $U^{(n+1)}$ pomocí vhodné maticové normy (například max). Jestliže:

$$\max_{i,j} \left\{ |u_{ij}^{(n)} - u_{ij}^{(n+1)}| \leq \varepsilon_L \right\} \Rightarrow STOP.$$

Jinak jdi na krok 5.

5. Přepiš $U^{(n)} \leftarrow U^{(n+1)}$ a jdi opět na krok 2.

Nástrojem pro interpretaci fuzzy množin jsou α -jádra fuzzy množin. Jedná se o klasické množiny, pro které platí [5]

$$C(u_i, \alpha) = \{x \in X : u_i(x) \geq \alpha\} \quad (7.22)$$

α -jádra lze je využít pro vyčištění shluků – zvýšení jejich homogenity.

7.4. Učící se klasifikátory

Učící se klasifikátory umožňují on-line klasifikaci – to je jejich velká výhoda. Naopak jejich nedostatkem je nutnost předem specifikovat trénovací množinu a klasifikátor na ní naučit rozpoznávat přicházející obrazy (objekty klasifikace). Fáze učení je buď provedena expertem nebo automaticky pomocí shlukové analýzy. Nový neznámý objekt, nezařazený do množiny prototypů ve trénovací množině, bude mít problém se zařazením. Učící se klasifikátory mohou být založeny na teorii klasických i fuzzy množin.

BEGIN

Zadej neznámý vektor y

Zadej k , počet nejbližších sousedů, $1 \leq k \leq n$

Inicializuj $i = 1$

DO UNTIL (nalezeno k -nejbližších sousedů)

Vypočti vzdálenost od y do x_i

IF ($i \leq k$) **THEN**

Zahrneme x_i do množiny k -nejbližších sousedů

ELSE

IF (x_i je blíže k y než jakýkoliv předchozí NN) **THEN**

Vymaž nejvzdálenější z množiny k -NN

Zahrň x_i do množiny k -NN

END IF

Zvětš i ($i = i + 1$)

END DO UNTIL

Urči majoritní třídu v množině k -NN (kde je nejvíce členů)

Tam přiřaď y

END

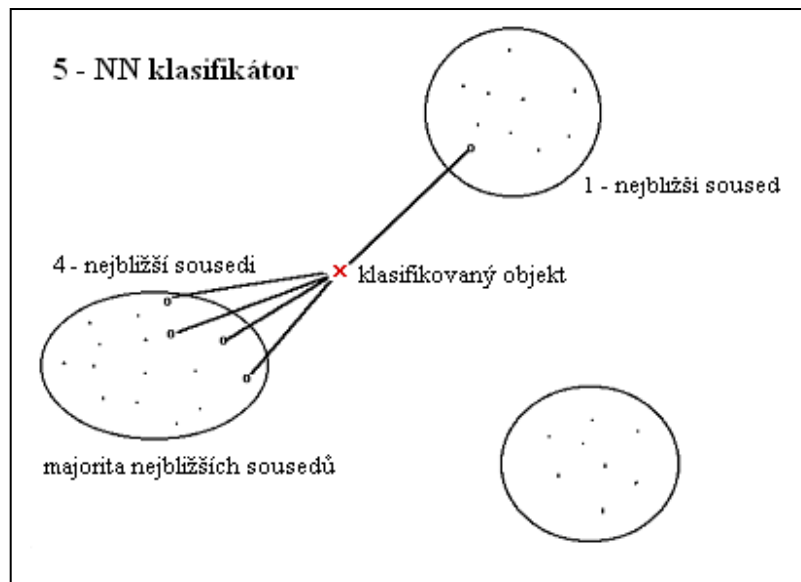
Obr. 66 a): Pseudokód k -NN klasifikátoru

□ k -NN klasifikátor

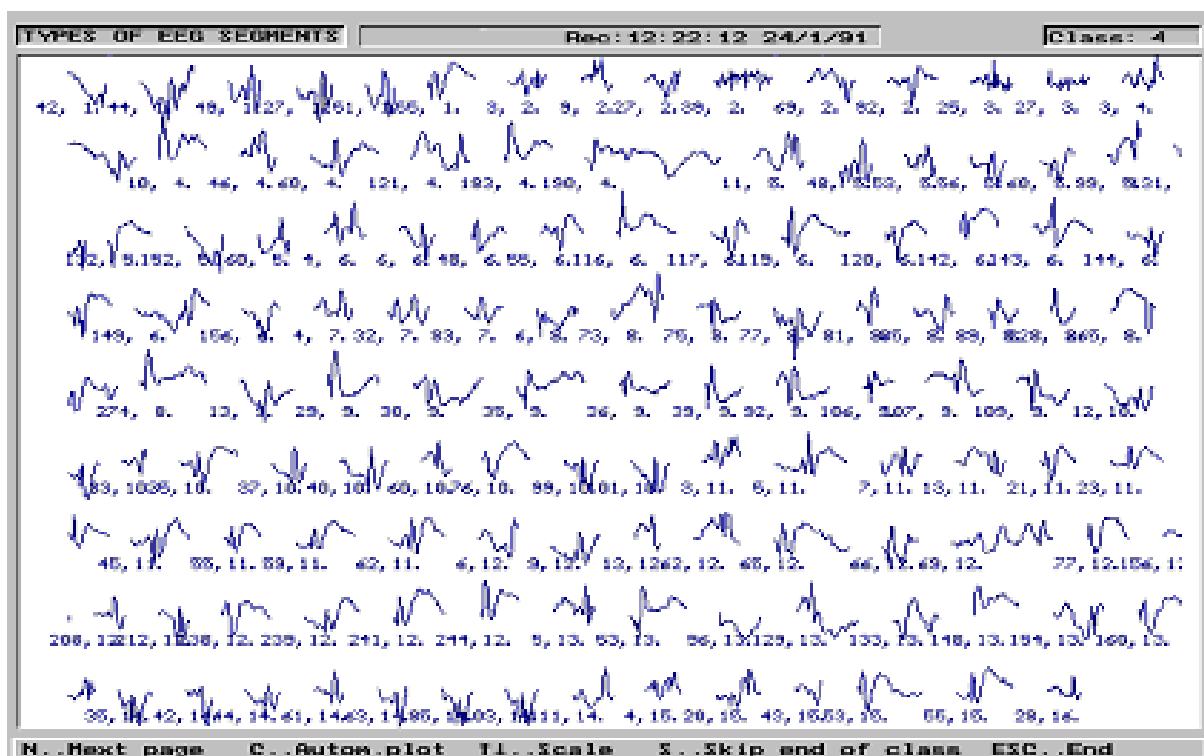
Mezi nejznámější algoritmy pro učící se klasifikátory patří k -NN-algoritmus (k -nearest neighbours). Necht' $W = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je množina n označených vzorů (vzorům je přiřazeno číslo třídy, do které patří). Neznámý objekt přiřadíme do té třídy, kde má největší počet nejbližších sousedů. Pseudokód klasifikátoru pak lze formalizovat takto [59] – viz obr. 66 a).

Příklad 5-NN klasifikátoru je pak ukázán na obr. 66 b).

Příklad klasické shlukové analýzy je uveden na obr 67. Ukázka zobrazuje první část třídy číslo 4) obsahuje shluk epileptické grafoelementy, ale také artefakty s podobnými spektrálními a tvarovými charakteristikami, jako ostatní grafoelementy (segmenty č. 2.9, 2.27, 3.27 atd. První číslo udává číslo kanálu, druhé pořadové číslo segmentu.



Obr. 66 b): Znázornění 5-NN klasifikátoru



Obr. 67: Automatická klasifikace EEG grafoelementů ALBA001.TRC s EMG artefakty – (1. řádek). Část třídy číslo 4 (z celkem šesti), klasická shluková analýza.

□ Fuzzy k-NN klasifikátor

Na rozdíl od klasického k -NN klasifikátoru, který přiřazuje neznámý vektor do příslušné třídy, fuzzy k -nearest neighbour klasifikátor přiřazuje neznámému vektoru členství v dané třídě (z kolika procent prvek do dané třídy náleží). Toto členství může kolísat mezi hodnotami 0 a 1, tak jako u fuzzy shluků.

Pseudokód fuzzy k -NN klasifikátoru lze formalizovat analogicky, jako v předchozí kapitole [59] – viz obr. 68

Ve vztahu (7.23) označuje u_{ij} členství prvků trénovací množiny (x_j) ve třídě i . Proměnná m určuje, jak silně je vážena vzdálenost při výpočtu příspěvku každého souseda ve funkci členství.

BEGIN

Zadej neznámý vektor y

Zadej k , počet nejbližších sousedů, $1 \leq k \leq n$

Inicializuj $i = 1$

DO UNTIL (nalezeno k -nejbližších sousedů)

Vypočti vzdálenost od y do x_i

IF ($i \leq K$) **THEN**

Zahrneme x_i do množiny k -nejbližších sousedů

ELSE

IF (x_i je blíže k y než jakýkoliv předchozí NN) **THEN**

Vymaž nejvzdálenější z množiny k -NN

Zahrň x_i do množiny k -NN

END IF

Zvětš i ($i = i+1$)

END DO UNTIL

Inicializuj $i = 1$

DO UNTIL (y má přiřazeno členství ve všech třídách)

vypočti fuzzy členství objektu ve třídě podle vztahu

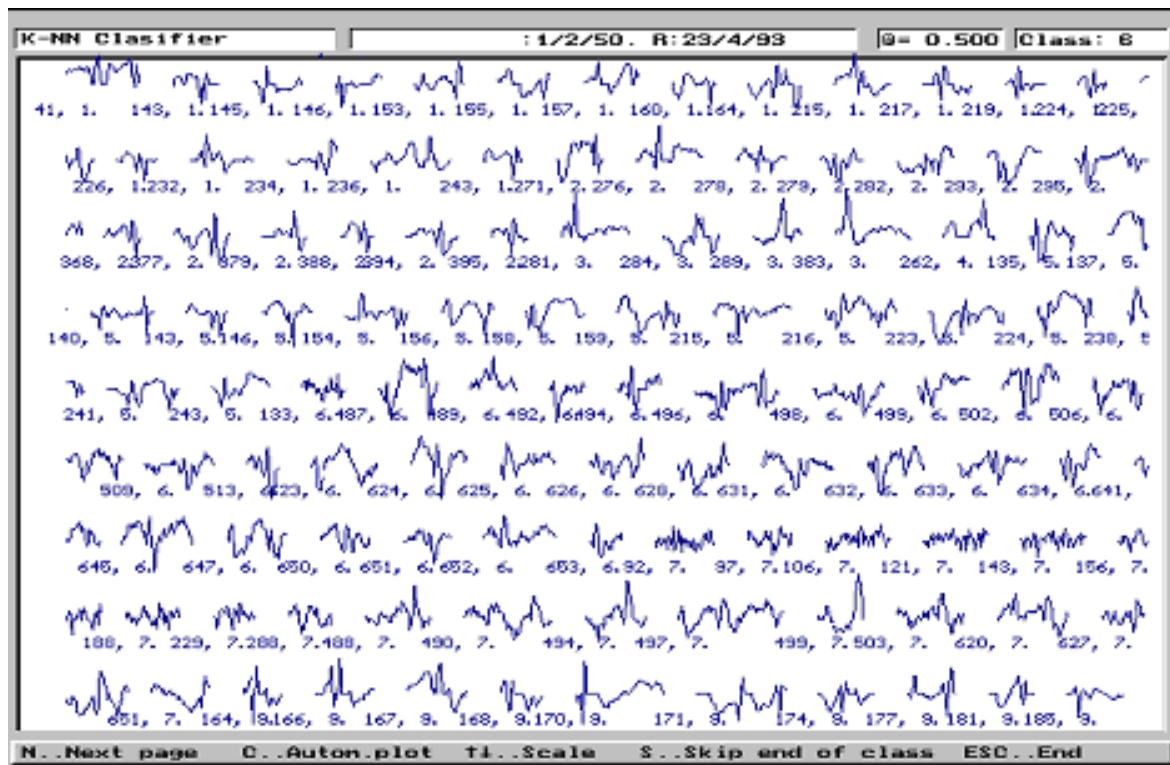
$$u_i(y) = \frac{\sum_{j=1}^K u_{ij} \cdot \left(\frac{1}{\|y - x_j\|^{2/(m-1)}} \right)}{\sum_{j=1}^K \left(\frac{1}{\|y - x_j\|^{2/(m-1)}} \right)} \quad (7.23)$$

Zvětš i ($i = i+1$)

END DO UNTIL

END

Obr. 68: Pseudokód K -NN klasifikátoru

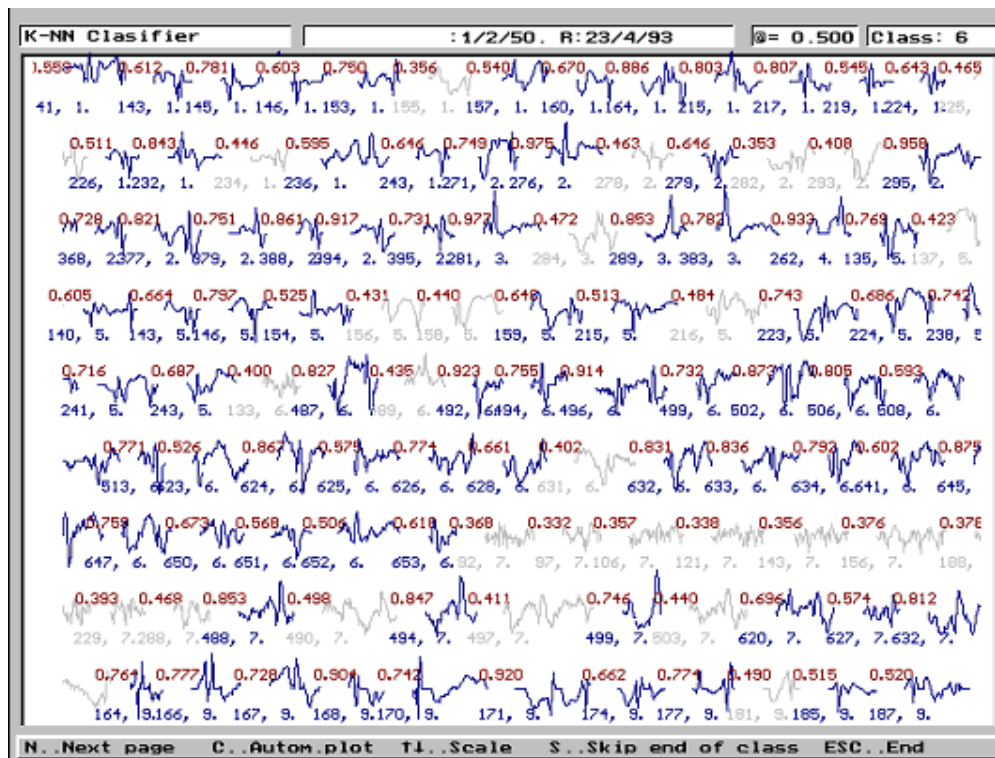


Obr. 69: Klasická třída č.6 obsahující objekty typu třídy 5 (řádek 7). K-NN klasifikátor

Třída číslo 5 sestává ze signálu kontaminovaného EMG aktivitou, zatímco převážnou část 6. třídy tvoří epileptická aktivita. Všimněte si nesprávně zařazených grafoelementů č. 7.97, až 7.156, které vykazují rysy obou tříd - páté i šesté, v klasickém třídění však nemohou být zařazeny s různým stupněm členství do různých tříd a byly proto klasifikovány do třídy č. 6, kam mají přece jen nejbližší.

Eliminaci uvedených hybridních segmentů na základě α -jader vidíme na obr. 70. Vyloučené grafoelementy s členstvím menším než 0.5 (které jsou však přesto k dispozici pro kontrolu) jsou zobrazené světle šedou barvou. Fuzzy členství je uvedeno nad segmenty. Je vidět, jak se v tomto případě podařilo úspěšně odstranit hybridní, netypické grafoelementy obsahující převážně EMG aktivitu a zvýšit tak homogenitu (stejnorodost) analyzované typové třídy. Pokud však mluvíme o "odstranění" nejedná se v žádném případě o definitivní ztrátu. Jak již bylo uvedeno, žádnou informaci o EEG signálu "nezahazujeme", i eliminované segmenty je možné kdykoliv znovu prohlédnout.

Protože učící se algoritmy vyžadují předchozí informaci o typu klasifikovaných dat, jejich použití bude zřejmě nejefektivnější u automatické klasifikace opakovaných záznamů téhož pacienta. Nejprve se metoda "naučí" (adaptuje) na určitý EEG graf a jeho specifické grafoelementy a poté může sloužit k velmi efektivnímu monitorování následujících vyšetření a sledování vývoje EEG grafu během terapie.



Obr. 70: Fuzzy klasifikace a eliminace EMG artefaktů (odstraněné hybridní segmenty znázorněny světle šedou barvou)



CD-ROM

Otevři soubor k-means, spust' animaci prezentace 3

Otevři soubor klasifikace, spust' animaci prezentace 5



Otázky 7

1. Proč je nutná přirozená struktura dat?
2. Jaký je rozdíl mezi klasickou množinou a fuzzy množinou?
3. Jak je definována Euklidova vzdálenost?
4. Jak stanovíte středy tříd?
5. Popište princip k -NN klasifikátoru



Korespondenční úkol

V programu Matlab vytvořte program pro k -NN klasifikátoru.

Je zadána množina etalonů. Zařaďte body $Y_1 = (5,6)$ a $Y_2 = (6,5)$ do nejbližší třídy. Použijte Euklidovskou vzdálenost. Objekt přiřaďte do té třídy, kam má nejbližší. Jako klasifikátor použijte:

a) 1-NN KLASIFIKÁTOR

b) 3-NN KLASIFIKÁTOR

Objekt	Souřadnice (x,y)	Třída
1	1,3	1
2	2,2	1
3	4,9	2
4	8,6	3
5	9,3	3
6	9,5	3
7	4,8	2
8	2,3	1
9	2,4	1
10	1,5	1
11	3,5	1
12	3,9	2
13	4,1	2
14	1,4	1
15	7,5	3
16	7,4	3
17	5,9	2
18	5,1	2
19	8,4	3
20	8,5	3



Text k prostudování

- [1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005



Další zdroje, použitá literatura

- [2] Anderberg, M., R.: Cluster Analysis for Applications. Academic Press, New York, 1974
- [3] Diday, E.: The dynamic clusters method in nonhierarchical clustering, Int. J. Comp. Inf. Sci, 2, No.1, 1973
- [4] Vogel, M., Wong, A.: PFS clustering method, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. PAMI-1, No.3., July, pp. 237-245, 1979
- [5] Bezdek, J., C.: Pattern Recognition with Fuzzy Objective Functions Algorithms. New

York, Plenum Press, 1981

- [6] Keller, J. et al.: A fuzzy K-nearest neighbor algorithm, IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern., Vol. SMC-15, No. 4, pp. 580-585, 1985
- [7] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc., 2000 Reference

8. UMĚLÉ NEURONOVÉ SÍTĚ (NN)



Čas ke studiu: 2x 2 hodiny



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- klasifikovat neuronové sítě
- navrhnout neuronovou síť algoritmem Back-propagation
- naučit Kohonenovou síť
- navrhnout neuronovou síť v prostředí Matlab



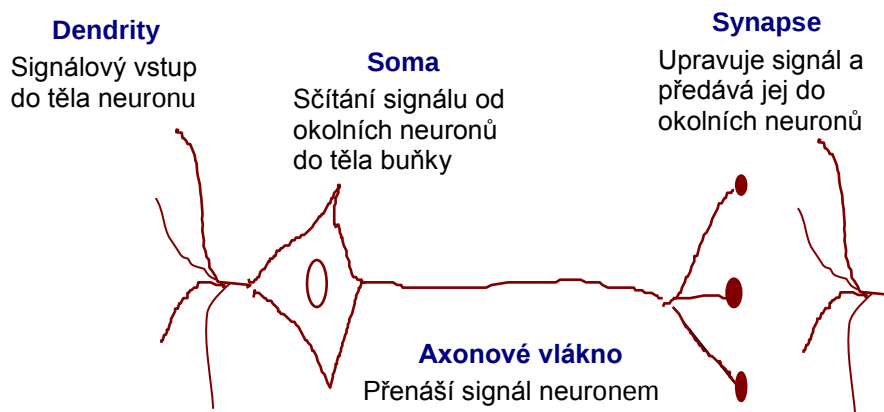
Pojmy k zapamatování 8

Neuronová síť (NN), neuron, trénovací množina, učení, aktivační funkce, dopředná a rekurentní struktura NN, perceptron, vícevrstvý perceptron, Back-propagation, Kohonenova NN.



Výklad

Neuronové sítě (NN) patří mezi nejbouřlivěji se rozvíjející metody umělé inteligence – viz obr. 59. Zahrnují jak učební algoritmy s učícím, tak i bez učitele (samoorganizující se). Základní pojmy z teorie neuronových sítí, které budou potřeba k diskusi o jejich aplikacích sou uvedeny v kap. 7. Podrobnou teorii čtenář najde v [1], [2], [3] a [4].



Obr.71: Schéma biologického neuronu

Neuronové sítě – simulují funkce lidského mozku, tzn. proces adaptace a učení. Schéma biologického neuronu je znázorněno na obr. 81.

Chceme-li vytvořit klasický model neuronu, musíme vytvořit algoritmus, který transformuje množinu vstupních dat na výstupní. Neuronové sítě toto nevyžadují, protože jsou schopny ve fázi učení průběžně adaptovat svoji strukturu a parametry tak, že jejich vlastnosti odpovídají vlastnostem studovaného objektu. K tomuto používá tzv. **trénovací množinu**

Z matematického hlediska můžeme popsat zpracování informace dvěma operacemi:

- **Operace synaptické** – každá synapse představuje paměť předchozích informací, na základě které vybavuje každý přicházející signál jeho relativní vahou. Tato váha představuje míru síly vazby mezi dvěma danými neurony. Vazba může představovat:

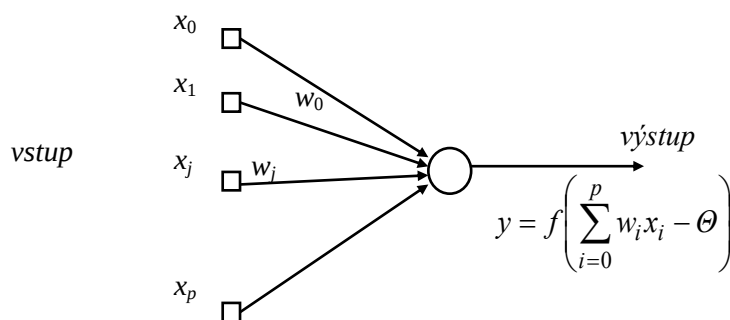
- a) excitaci (vybuzení)
- b) inhibici (utlumení)

Synaptická vazba představuje také převod impulsního signálu na napětí o-vý, jehož velikost je úměrná frekvenci přicházejících impulsů.

- **Operace somatické** vstupní signály jsou váženy příslušnými váhami a dále sečítány. Jestliže hodnota součtu vážených signálů přesáhne práh je v somatu generován výstupní signál neuronu. Výstupní signál má pulsní charakter se střední frekvencí úměrnou jeho velikosti. Výstupní signál je potom veden axonem do výstupních synapsí k dalším neuronům pro následující zpracování.

Základním prvkem a procesní jednotkou v neuronové síti je neuron. Z teoretického hlediska lze na neuron pohlížet jako na systém s mnoha vstupy a jediným výstupem – MISO (Multi – Input Single – Output). Matematická formulace procesů probíhající v biologickém neuronu, umožňuje vytvořit matematický model – umělý neuron - perceptron. Z hlediska přenosu a zpracování informace můžeme strukturu neuronu představit schématem – viz. obr. 72. Vazby jednotlivých neuronů → umělou neuronovou síť, modelující zpracování impulsů ve skutečné biologické neuronové síti.

Aktivační funkce mohou mít různý tvar:



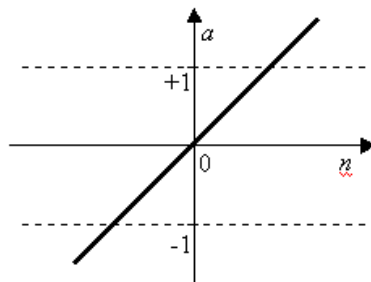
Obr. 72: Lineární model neuronu, kde $x_0, \dots, x_p$ jsou vstupy neuronu

w_{jk} váhy,
 y_k je výstup neuronu a
 f je aktivační funkce
 Θ je práh neuronu

- a) lineární aktivační funkce – jsou umístěny ve výstupních vrstvách neuronových sítí
- b) nelineárních aktivačních funkcí, které se využívají ve skrytých vrstvách neuronových sítí.

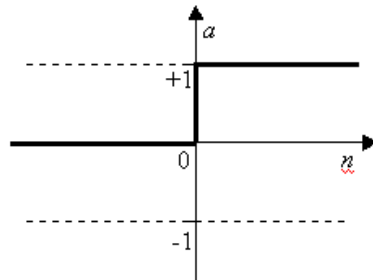
Příklad některých aktivačních funkcí:

1. Lineární funkce:

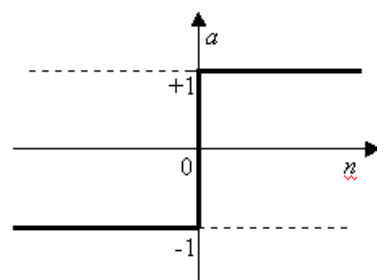


a) Lineární závislost: $a = k \cdot n$

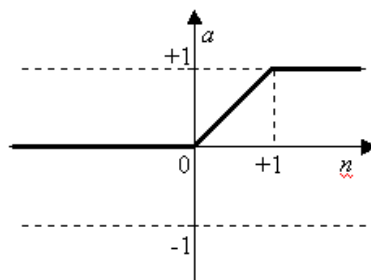
b) Skoková funkce: $a = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$



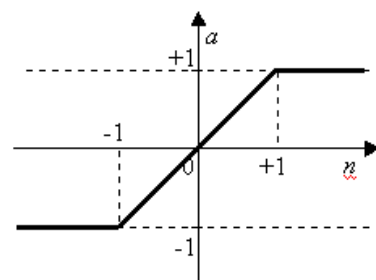
$a = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ -1 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$



c) Omezená funkce: $a = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 1 \\ kn & 0 \leq n < 1 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



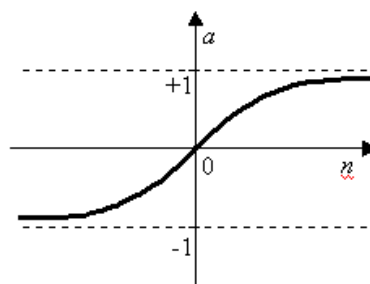
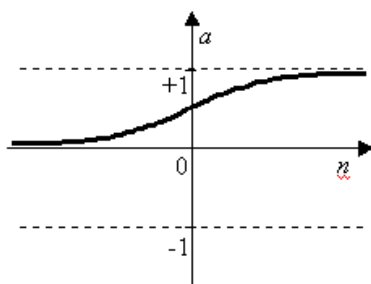
$a = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 1 \\ kn & 0 \leq n < 1 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$



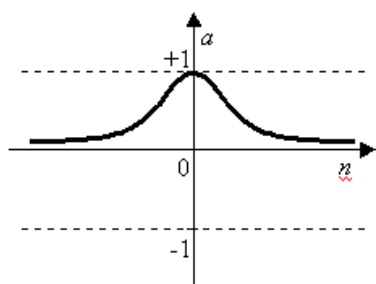
2. Nelineární funkce:

a) Sigmoida: $a = \frac{1}{1 + e^{-n}}$

b) Heavisideova funkce $a = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$
(hyperbolická tangenta)

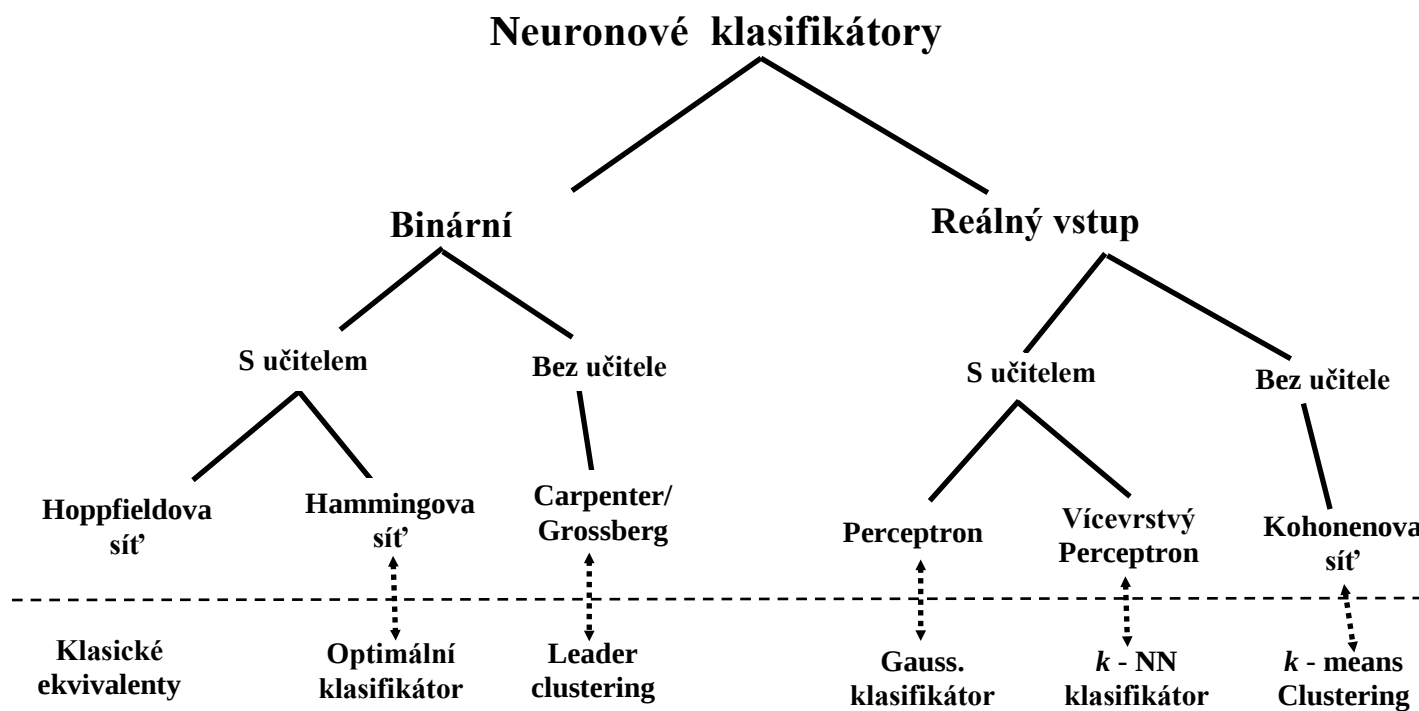


c) Gaussovská funkce: $a = e^{-n^2}$



Neuronové sítě se skládají ze vzájemně propojených uzlů – neuronů. Uzel sítě přijímá vážený součet vstupních hodnot (váhy w_i) a převádí výsledek přes nelineární funkci f . Symbol θ označuje práh (konstantní předpětí – bias).

Klasifikace neuronových sítí:



Obr. 73: Přehled neuronových klasifikátorů (Lippman, 1987)

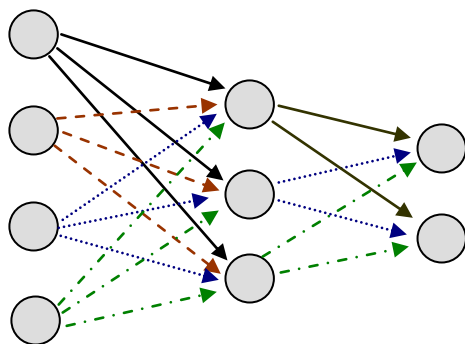
8.1. Topologie NN a způsoby šíření signálu

Obecně by neuronová síť mohla mít strukturu popsanou libovolným orientovaným grafem pomocí vrcholů – neuronů a orientovaných hran – propojení. Vlastnosti takové struktury se obtížně analyzují. Proto jsou analyzovány nejdříve sítě s nějakými pravidelnými strukturami. Takovou strukturou je např. vícevrstvá struktura – viz. obr. 74. Rozlišujeme následující vrstvy NN:

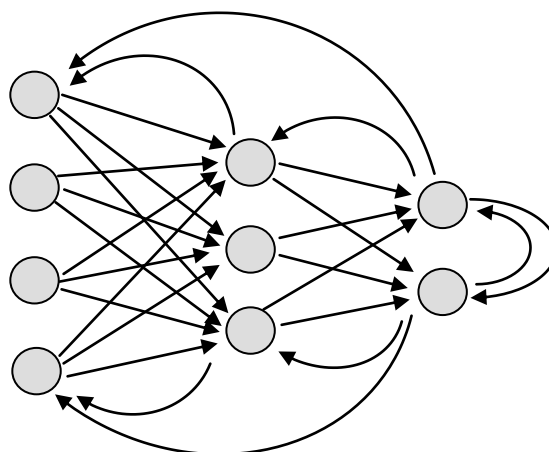
- ♦ **vstupní vrstvu** – neurony dostávají vstup pouze z vnějšího okolí a výstup obvykle pokračuje k dalším neuronům NN
- ♦ **skrytou vrstvu** (hidden layer) – neurony dostávají vstup z ostatních neuronů nebo i z vnějšího okolí přes prahové propojení a jejich výstupy pokračují dále do NN
- ♦ **výstupní vrstvu** – podobná skryté vrstvě, pouze výstup z této vrstvy vyúsťuje do okolního prostředí.

Tzn., že můžeme rozlišovat i neurony jako vstupní, skryté a výstupní. Při návrhu NN rozdělujeme topologii NN do dvou základních skupin:

- **dopředná NN** (feed-forward) – signál se šíří po orientovaných synoptických propojeních jen jedním směrem – dopředu – viz obr. 75.
- **rekurentní NN** (recurrent) – u těchto sítí je obtížné rozdělení vrstev a neuronů na vstupní, resp. výstupní



Obr. 74: Struktura dopředné NN



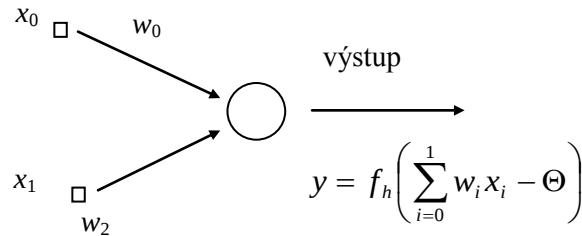
Obr. 75: Struktura rekurentní NN

Šíření signálu v rámci NN může být různé, např:

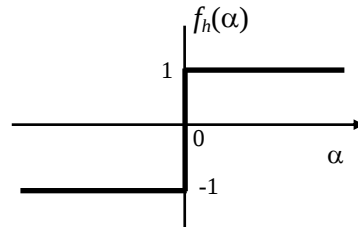
- synchronní šíření signálu – všechny neurony mění svůj stav do taktu (prostřednictvím synchronizačních hodin)
- sekvenční šíření signálu – neurony mění svůj stav postupně při šíření signálu
- blokově-sekvenční šíření signálu aktivizují se jen skupiny neuronů, podle předem určeného pravidla
- asynchronní šíření signálu – neurony mění své stavy nezávisle jeden od druhého

8.2. Perceptron a jeho učení

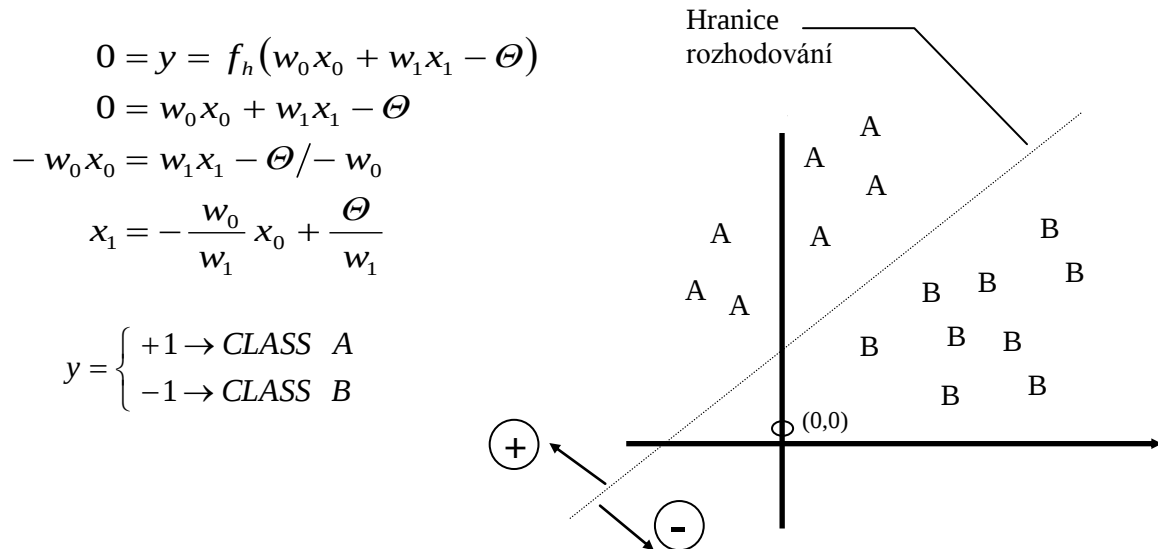
Jedním z nejjednodušších učících se klasifikátorů je Perceptron, navržený Rosenblattem v roce 1958. Převádí vstup pomocí přenosové funkce na výstup. Je určený na dichotomickou klasifikaci, tj. rozdělení do dvou tříd, o kterých se předpokládá, že jsou lineárně separovatelné v příkladovém prostoru (přímka ve 2-rozměrném prostoru, rovina v 3-rozměrném prostoru) – viz obr. 76. Příklad pro klasifikaci vstupního vektoru do dvou tříd A a B je uveden na obr. 78.



Obr. 76: Příklad perceptronu pro klasifikaci dvou tříd ve 2-rozměrném prostoru.



Obr. 77: Rozhodovací funkce perceptronu (hard limiter)



Obr. 78: Příklad klasifikace do 2 tříd

Perceptron vypočte vážený součet vstupních hodnot, odečte mez Θ , nechá projít výsledek přes nelinearit, takže výstup je +1 nebo -1. Např.: v obr. 88 bod (0,0) $\Rightarrow y = f(-\Theta) = -1 \dots$ třída B.

Perceptron je nutné na daný problém **naučit**. Učení spočívá v postupném předkládání (trénování) známých vzorů (o kterých víme, do které třídy patří) a postupná úprava vah perceptronu až do konvergence (váhy jsou optimálně nastaveny a přímka - rozhodovací nadplocha rozděluje obě třídy).

Postup učení perceptronu

Krok 1: Inicializuj váhy a mez

Nastav váhy $w_i(0)$ $0 \leq i \leq N-1$ na malé náhodné hodnoty. $w_i(t)$ je váha vstupu i v čase t .

Krok 2: Zadej nový vstup a jeho požadovaný výstup

Vstupní hodnoty jsou $x_0, x_1, \dots, x_p$ a požadovaný výstup (cíl klasifikace) je $d(t)$.

Krok 3: Vypočti skutečný výstup

$$y(t) = f_h \left(\sum_{i=0}^p w_i(t) x_i(t) - \Theta \right)$$

Krok 4: Uprav váhy (adaptuj)

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \eta [d(t) - y(t)] x_i(t), \quad 0 \leq i \leq p$$

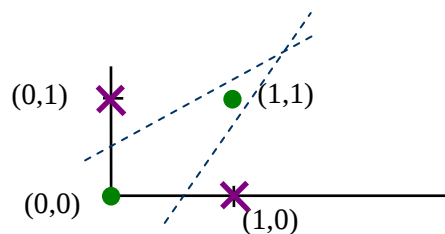
...

$$d(t) = \begin{cases} +1 & \text{pro vstup z třídy A} \\ -1 & \text{pro vstup z třídy B} \end{cases}$$

$\eta < 1$ je učební koeficient (ovlivňuje rychlost učení), $d(t)$ je požadovaný správný výstup pro daný vstup. Při správném rozhodnutí perceptronu se váhy nemění.

Krok 5: Opakuj postup-Jdi na krok 2

Problém perceptronu – dokáže oddělit pouze lineárně separabilní množiny. Nevřeší například XOR – eXclusive OR problém, kdy jedna třída jsou body (0,0) a (1,1) a druhá třída (označena křížky) jsou body (0,1) a (1,0) – viz obr. 79. Řešení tohoto problému přinesl vícevrstvý perceptron – obr. 80.



Obr. 79: Příklad problému, který není lineárně separabilní (XOR problém)

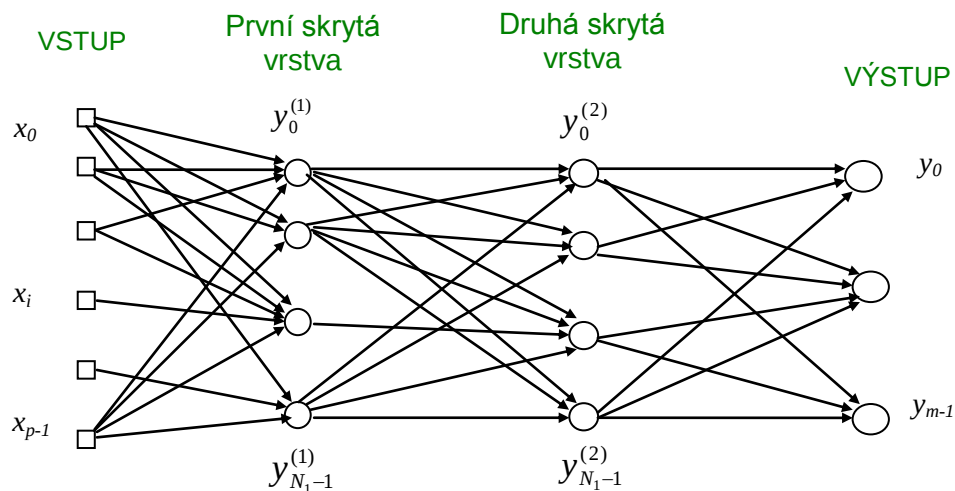
8.3. Vícevrstvý perceptron – multilayer perceptron (MLP)

- síť typu feed – forward (dopředné šíření - propagace) s jednou nebo více vrstvami uzlů mezi vstupem – výstupem
- tyto vrstvy obsahují skryté uzly (nejsou přímo propojeny s vstupními/výstupními uzly)
- schopnosti MLP vyplývají z nelinearit použitých pro přenosové funkce uzlů (hard limiter, sigmoid)

Třívrstvý perceptron umí aproximovat jakkoliv složité rozhodovací oblasti (Lippmann).

Platí:

- Počet uzlů v druhé vrstvě musí být větší než jeden, pokud jsou rozhodovací oblasti izolovány a nemohou být spojeny do jedné konvexní oblasti. V nejhorším případě je jejich počet roven počtu nespojitých oblastí.
- Počet uzlů v první skryté vrstvě by měl být dostatečný pro vytvoření alespoň tří hran v každé konvexní oblasti generované body druhé vrstvy, mělo by tedy být 3x více uzlů v druhé vrstvě než v první skryté vrstvě
- Platí to pro perceptron s jedním výstupem, pro více výstupů je to složitější (rozhodovací oblasti nejsou omezeny přímkami, ale hladkými křivkami)



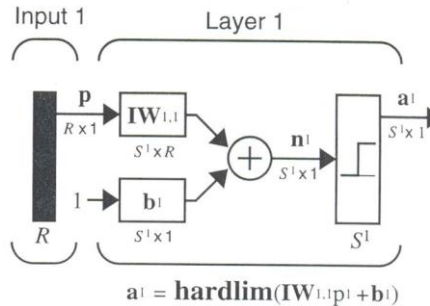
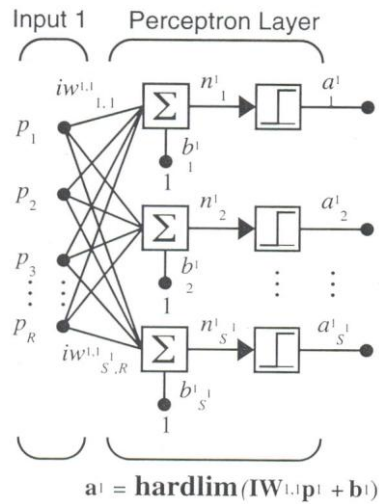
$$y_j^{(1)} = f\left(\sum_{i=0}^{p-1} w_{ij}^{(0)} x_i - \theta_j^{(0)}\right) \quad y_j^{(2)} = f\left(\sum_{i=0}^{N_1-1} w_{ij}^{(1)} y_i^{(1)} - \theta_j^{(1)}\right) \quad y_j = f\left(\sum_{i=0}^{N_2-1} w_{ij}^{(2)} y_i^{(2)} - \theta_j^{(2)}\right)$$

Obr. 80: Třívrstvý perceptron



Řešený příklad 8.1

Architektura perceptronu:



kde

R je počet vstupních členů

S^1 je počet neuronů ve vrstvě 1

Učení perceptronu:

$$W^{new} = W^{old} + ep^T$$

$$b^{new} = b^{old} + e \quad \text{kde } e = t - a$$

help percept

vytvoření sítě: `newp`

inicializace: `init`

simulace: `sim`

trénování: `train`

učení: `learnp`

normované učení: `learnp`

aktivační funkce: `hardlim`

Váhy a prahy jsou inicializovány pomocí funkce `initzero`

Adaptace a trénink jsou realizovány pomocí `trains` a `trainc`

Míra naučení se určuje pomocí průměrné absolutní chyby `mae`

NEWP

Syntaxe: `net = newp`
`net = newp(pr,S,tf,lf)`

pr - $R \times 2$ matice minimálních a maximálních hodnot pro R vstupních elementů

S - počet neuronů

tf – přenosová funkce, default = 'hardlim'.

lf – algoritmus učení, default = 'learnp'.

přenosová (aktivační) funkce *tf* může být *hardlim* nebo *hardlims*
algoritmus učení *lf* může být *learnp* nebo *learnpn*



Řešený příklad 8.2

Je vytvořen Perceptron se 2 elementy na vstupu (rozsah $[0 \ 1]$ a $[-2 \ 2]$) a jedním neuronem.

☒ **Řešení :** v MATLABu

```
net = newp([0 1; -2 2],1);
```

Na vstupu je množina P tvořená 4 vektory o 2 elementech a 4 odpovídající cílové (target) hodnoty T o 1 elementu.

```
P = [0 0 1 1; 0 1 0 1];
T = [0 1 1 1];
```

Trénovat budeme na 20 epoch a pak provedeme simulaci.

```
y = sim(net,P)
net.trainParam.epochs = 20;
net = train(net,P,T);
y = sim(net,P)
```

Pozn: Je-li u hodnot vstupních elementů velký rozptyl, dosáhneme rychlejšího naučení pomocí funkce *learnpn*

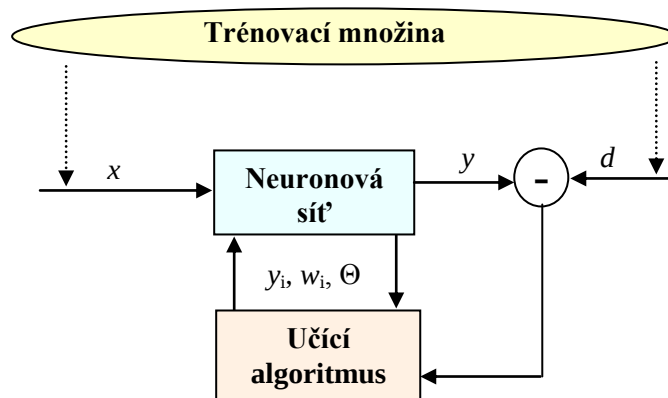
8.4. Další algoritmy učení

□ Algoritmus zpětného šíření (back-propagation)

Učení probíhá metodou učení s učitelem. Podle způsobu jakým se vypočítávají váhy je to iterativní gradientní algoritmus minimalizující čtverec rozdílu mezi skutečným výstupem MLP a požadovaným výstupem. Nelinearity musí být spojitě diferencovatelné, jako je například sigmoidální logistická funkce

$$f(\alpha) = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha - \theta)}}$$

- autorem metody zpětného šíření je Werbos (1974), algoritmus znovu realizoval Rumelhart v roce 1986
- slouží pro nastavení vah uzlů MLP
- používá hledání ve směru největšího gradientu pro minimalizaci nákladové funkce, kterou je střední čtverec rozdílu mezi požadovanými a skutečnými výstupy sítě
- požadovaný výstup sítě pro nesprávné třídy je malý (0 nebo < 0.1), pro uzly korespondujících správné tříd jsou vysoké hodnoty (1.0 nebo > 0.9)
- síť je trénovaná tak, že zpočátku zadáme malé náhodné váhy a poté opakovaně předkládáme vzorky trénovací množiny. Váhy jsou upravovány po každém průběhu až do konvergence (nákladová funkce - čtverec chyby je minimální)
- základním prvkem algoritmu je iterativní postup, jímž postupuje chyba nutná pro adaptaci-úpravu vah ZPĚT z uzlů výstupní vrstvy do uzlů vstupní vrstvy



Obr. 81: Grafické znázornění algoritmu zpětného šíření

Back-propagation algoritmus

Krok 1: Inicializuj váhy a meze

Nastav váhy a meze uzlů na malé náhodné hodnoty (váhy v síti nastavíme náhodně na hodnoty v doporučeném rozsahu $\langle -0.3, 0.3 \rangle$)

Krok 2: Předlož vstup a žádané výstupy

Předlož vzorek $x = [x_0, x_1, \dots, x_{p-1}]$

Zadej požadované výstupy $d = [d_0, d_1, \dots, d_{m-1}]$. Pokud je síť užitá jako klasifikátor, pak všechny požadované výstupy jsou nastaveny na nulu kromě výstupu pro třídu, odkud je vstup - ten je nastaven na 1

Krok 3: Vypočti skutečné výstupy

Vypočti výstupy uzlů sítě $y = [y_0, y_1, \dots, y_m]$ s použitím nelinearity $f(\alpha)$ a výstupů předchozích uzlů.

Krok 4: Adaptuj váhy

Použij rekursivní algoritmus začínající na výstupních uzlech a postupující zpět k uzlům první skryté vrstvy

- vypočti chybový signál ve výstupní (L -té vrstvě) pro iteraci $n, j = 0, \dots, N_{L-1}$

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j^L(n)$$

- počítej lokální gradienty δ (chyby při postupu zpět vrstva za vrstvou)

- pro neuron j ve výstupní vrstvě L

$$\delta_j^{(L)} = e_j^{(L)}(n) y_j^{(L)}(n) [1 - y_j^{(L)}(n)]$$

- pro neuron j skryté vrstvy h ($1 \dots h$)

$$\delta_j^{(h)} = y_j^{(h)}(n) [1 - y_j^{(h)}(n)] \sum_{k=0}^{N-1} \delta_j^{h+1}(n) w_{kj}^{h+1}(n)$$

- uprav váhy podle

$$w_{ji}^{(h)}(n+1) = w_{ji}^{(h)}(n) + \eta \delta_j^{(h)}(n) y_i^{(h-1)}(n), \text{ kde } \eta \text{ je parametr rychlosti učení}$$

- aby nedošlo k uzavření v lokálních minimech, je možné použít momentum α

$$w_{ji}^{(h)}(n+1) = w_{ji}^{(h)}(n) + \alpha [w_{ji}^{(h)}(n) - w_{ji}^{(h)}(n-1)] + \eta \delta_j^{(h)}(n) y_i^{(h-1)}(n)$$

Parametry η a α se volí v rozsahu $\langle 0, 1 \rangle$

Krok 5: Jdi na krok 2.

8.5. Samoseorganizující neuronové sítě

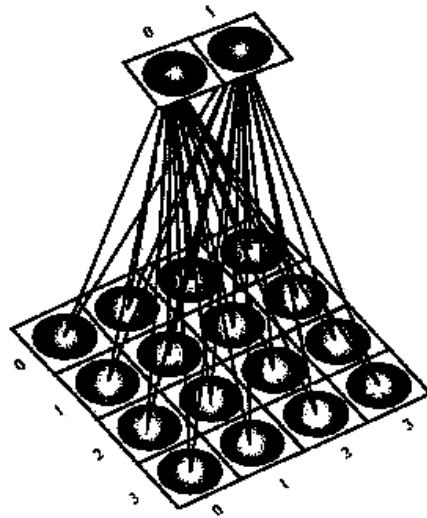
Jsou sítě, které nepotřebují ke svému učení učitele. Základním principem jejich funkce je shluková analýza, tj. schopnost algoritmu, síť, nalézt určité vlastnosti a závislosti přímo v předkládaných trénovacích datech bez přítomnosti nějaké vnější informace, jako je tomu např. u perceptronové sítě.

Myšlenka samoseorganizující vlastní struktury sítě byla rozvinuta počátkem 70-tých let von der Malsburgem a posléze Willshenwem.

□ Kohonenova síť

Základní myšlenka Kohonenovy sítě vychází z poznatku, že většina neuronů v mozkové kůře je organizována v dvojdimenzionálním prostoru, tj. v rovině. Spoje mezi neurony vedou pouze mezi sousedními neurony. Kohonenův základní model vychází z tohoto poznatku – viz obr. 82, i když

algoritmus připouští i vícedimen-zionální uspořádání vstupních neuronů. Pojem vrstev je zde zastřen, protože kromě vstupní vrstvy je tu vrstva výstupní. Počet vstupů do sítě je roven dimenzi vstupního prostoru. Nejčastěji je počet vstupů roven dvěma.



Obr. 82: Typické uspořádání Kohonenovy sítě se dvěma vstupy a rovinovou mřížkou.

Počet vstupů, které přicházejí do neuronu, je roven počtu vstupů do Kohonenovy sítě. Váhy těchto vstupů slouží k zakódování vzorů, které reprezentují předložené vzory, stejně jako u perceptronu. Vlastní přenosovou funkci tyto neurony nemají. Jedinou operaci, kterou neuron provádí je výpočet vzdálenosti (odchylky) předloženého vzoru od vzoru zakódované-ho ve vahách daného neuronu podle vztahu

$$d = \sum_{i=0}^{N-1} [x_i(t) - w_i(t)]^2$$

kde $x_i(t)$ jsou jednotlivé elementy vstupního vzoru

$w_i(t)$ jsou odpovídající váhy neuronu, které představují zakódované vzory

d výstup z neuronu

Každý vstup je spojen s každým neuronem mřížky. Každý neuron v mřížce je přímo výstupem. Počet výstupů je tedy roven počtu neuronů.

Princip učení SOM

- Matici neuronů se postupně předkládají vektory vstupního signálu ($\mathbf{x}$) tak, že se zvlášť porovnává rozdíl příslušných hodnot vektoru vah (koeficientů $\mathbf{w}$) každého neuronu s hodnotami vektoru vstupního signálu. K vyjádření rozdílu použijeme např. Euklidovu vzdálenost d
- Výsledkem je počet hodnot d , rovný počtu neuronů ve struktuře (např. 100 hodnot v matici 10 x 10 neuronů). Následně se vybere jediný neuron s nejmenším d a označí se jako tzv. vítěz (winner). Váhy tohoto neuronu se nejvíce ze všech odpovídají hodnotám právě předloženého signálu. Při předkládání první učícího vstupního vektoru se jeho hodnoty porovnávají s náhodně vygenerovanými hodnotami vah (koeficientů) jednotlivých neuronů.
- Váhy $\mathbf{w}$ vítězného neuronu se pak upravují (updatují), aby se co nejvíce přiblížily hodnotám právě předloženého vstupního vektoru ($\mathbf{x}$) :

$$w_{i \text{ nové}} = w_{i \text{ staré}} + \alpha (x - w_{i \text{ staré}})$$

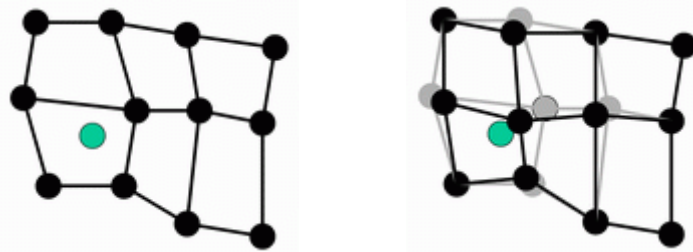
kde

α ... učicí koeficient vyjadřující rychlost učení, (nabývá hodnot 0 až 1)

$w_{i \text{ nové}}$... vektor vah (koeficientů) i -tého neuronu $w_i = [w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_n}]$

x ... vstupní učicí vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

- Při opakování dávky učících vektorů nebo postupným předkládáním dalších nových dávek se učicí koeficient α snižuje. Spolu s vítězným neuronem se mění i sousední neurony v definovaném okolí R . Jejich váhy se upravují stejným způsobem jako u vítěze, pouze s tím rozdílem, že koeficient α je nahrazen koeficientem β , přičemž platí $\alpha < \beta$. Při opětovném opakování dávky učících vektorů se můžeme snižovat i hodnoty okolí R až na $R = 0$, tzn. adaptuje se pouze vítěz
- V maticové struktuře neuronů vznikne několik významných center, tzv. shluky, mezi nimiž se výrazně liší hodnoty vah neuronů. Neurony, jejichž váhy během učení dosáhly nulových hodnot, se ze struktury mohou vyloučit. Počet shluků by měl být shodný s počtem odlišných vlastností nebo parametrů, které Kohonenova mapa našla v předložených dávkách učících vstupních vektorů.



- Pro kontrolu a přehlednost učení mapy využíváme grafického zobrazení shluků, které vyjadřuje prostorové vztahy mezi neurony v prostoru vah. V diagramu jsou váhové vektory (neurony) zobrazeny jako černé body v dvojdimenzionálním prostoru, které zároveň tvoří centra shluků. Černé čáry představují přímky spojující váhové vektory sousedních neuronů. Na obrázku je ukázaná změna "pozice" neuronu před a po adaptaci vah na vstupní vektor (zelený bod).
- Správné naučení představuje rovnoměrné rozprostření vzájemně propojených bodů po celé ploše, která popisuje vstupní datový prostor, v němž jsou vstupní vektory dat rovnoměrně rozloženy.

Učení Kohonenovy sítě

Krok 1: Inicializace.

Vyberou se náhodně hodnoty váhových vektorů w_{ij} , $0 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq M-1$ (N výstupů, M neuronů v mřížce)

Krok 2: Vybere se vstupní vzorek $x(t) = \{x_0(t), x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)\}$ z trénovací množiny

Krok 3: Vypočteme vzdálenosti (podobnosti) d_j mezi předloženým vzorem a všemi výstupními neurony j podle vztahu

$$d = \sum_{i=0}^{N-1} [x_i(t) - w_i(t)]^2$$

Krok 4: Nalezne se nejpodobnější (vítězný) neuron j^* na základě nejmenší vzdálenosti od vzoru x

$$d_{j^*} = \min_j (d_j)$$

Krok 5: Upraví se váhy

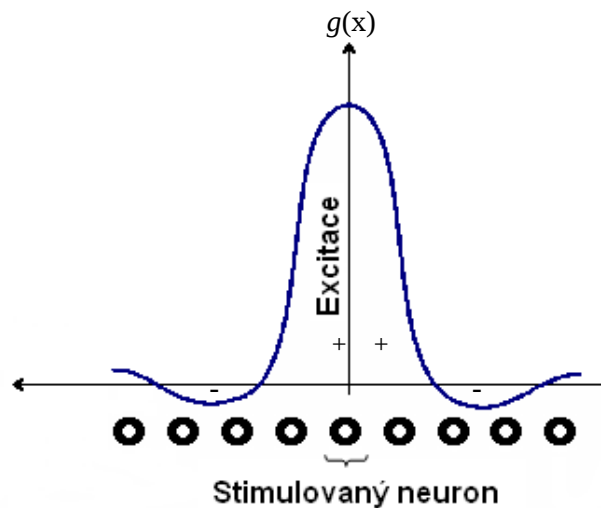
Přizpůsobíme váhy pro neuron j^* a jeho okolí $N_{j^*}(t)$, tj. pro všechny ležící uvnitř tohoto okolí podle vztahu

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta(t)[x_i(t) - w_{ij}(t)]$$

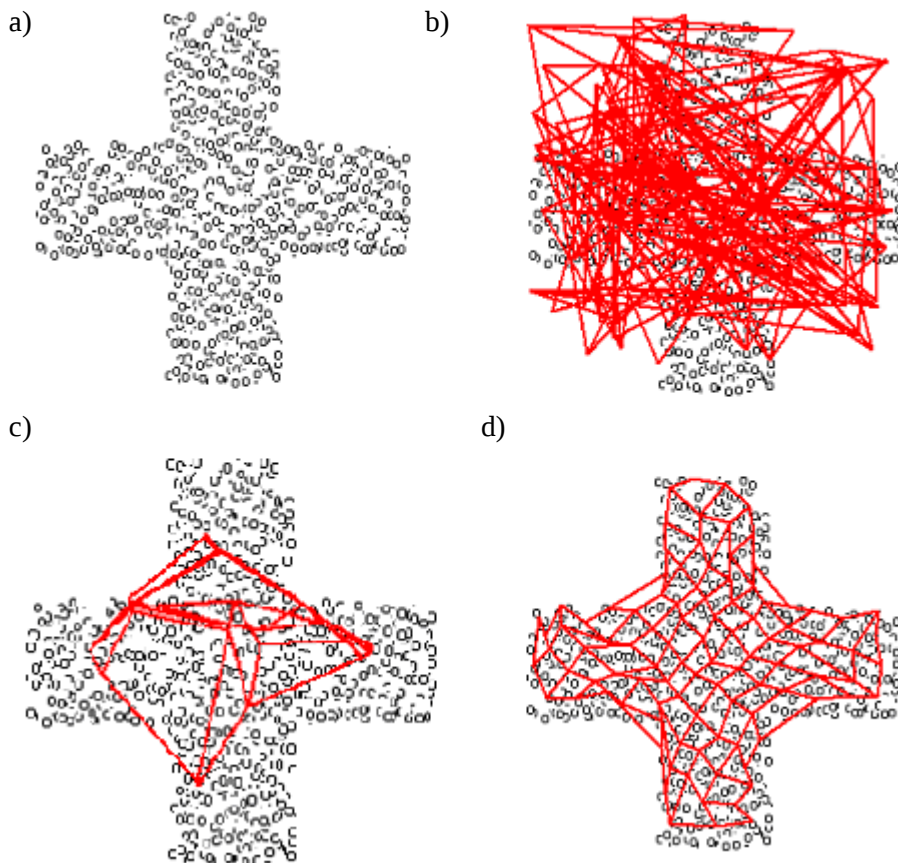
kromě nastavení vah je nutné také inicializovat tzv. parametr učení $\eta(0)$. Tento koeficient řídí rychlost učení. Na začátku se jeho hodnota nastaví na 1 a během učení se snižuje k nule. Tím dosáhneme toho, že ze začátku se váhy adaptují rychleji a ke konci pomalu.

Krok 6: 5. Pokračuj dokud jsou vidět změny

Na obr. 83 je znázorněna funkce, která vyjadřuje míru adaptace okolních vah. Tato funkce byla experimentálně zjištěna z reálných biologických neuronových sítí. Neurony blízké danému neuronu ($x = 0$) jsou váhy poopraveny téměř shodně jako pro vlastní neuron. Jestliže se vzdalujeme od středu, přestávají se váhy adaptovat až do okamžiku, kdy funkce překročí osu x . potom jsou váhy naopak inhibovány, místo toho, aby byly excitovány.



Obr. 83: Biologická adaptační funkce - Mexický klobouk – funkce popisující laterální vazby mezi sousedními neurony v mřížce – stupeň excitace klesá se vzdáleností od aktivního neuronu



Obr. 84: Znáznornění učení sítě 10 x 10 neuronů:

- a) neuronová síť
- b) počáteční stav vah
- c) rozvinování mřížky
- d) konečný stav vah

Na obr. 84 je příklad učení Kohonenovy sítě na obr. 84 a) je znázorněna síť 10x10 neuronů = 1000 vzorů – vstup. Na obr. 84 b) je počáteční stav vah – síť neví jak vypadá obrazový prostor. Na obr. 84 c) je znázorněno rozvinování mřížky – trénovaná síť pochopí, kam se má rozšiřovat. Obr. 84 d) znázorňuje konečný stav vah – v praxi je 20 % oblasti nepokryto (je to dáno učícími schopnostmi sítě).



CD-ROM

Otevři soubor neuron_sit, spust' animaci prezentace 6



Otázky 8

1. Co jsou umělé neuronové sítě
2. Kolik přímek (rozhodovacích nadploch) je potřeba k vyřešení problému XOR?

3. Pro jaké problémy jsou vhodné NN sítě s neurony s lineární přenosovou funkcí $f(*)$?
4. Které algoritmy učení řadíme k
 - a) "Učení bez učitele"
 - b) "Učení s učitelem"
5. Jak nastavíme váhy a prahy NN



Úlohy k řešení 8

1. V programu Matlab prostudujte demonstrační úlohy:

nnd4db ukázka hraniční přímky

nnd4pr pravidlo učení Perceptronu (rozdíl mezi učením a tréninkem)

demop1 klasifikace pomocí Perceptronu se 2-vstupy
(4 vektory o 2 elementech, klasifikace do 2 tříd)

demop4 nevyvážená data (dlouhé učení)

$P = [-0.5 \ -0.5 \ +0.3 \ -0.1 \ -40; \ -0.5 \ +0.5 \ -0.5 \ +1.0 \ 50];$

$T = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1];$

`plotpv(P,T);`

demop5 Normalizace Perceptronu (2-vstupní hard limit neurony jsou trénovány pro klasifikaci 5 vstupních vektorů do 2 kategori, jeden z vektorů je mnohem větší než ostatní, trénink s funkcí `learnpn` je rychlejší)

demop6 lineárně neseperabilní prostory

help linnet

newlin vytvoření lineární sítě

newlind návrh lineární vrstvy

learnwh W-H učící algoritmus

purelin aktivační funkce

sim simulace

adapt adaptativní filtrace

applin2 adaptivní lineární predikce

demolin8 adaptivní odšumování

nnd10nc adaptive odhlučněním kokpitu letadla

demolin1 asociace vzorů

demolin2 trénink lineárního neuronu

nnd10lc lineární klasifikátor

demolin4 lineární řešení nelineárního problému

demolin5 nedostatečně určená úloha

demolin6 lineárně závislá úloha

demolin7 příliš velký learning rate



Text k prostudování

- [1] Mohylová, J, Krajča, V.: Zpracování signálu v lékařství. Elektronické skriptum
Žilina, Slovensko, ISBN 80-8070-341-8, 2005



Další zdroje, použitá literatura

- [2] Haykin, S.: Neural Network – A Comprehensive Foundation Macmillian Publishing, 1994
- [3] Linsker, R.: Self-organization in perceptual network, Computer 21, pp.
105-117, 1988
- [4] Lippmann, R., P.: An introduction to computing with neural nets, IEEE ASSP Magazine 4,
pp. 4-22, 1987
- [5] Vondrák, I.: Umělá inteligence a neuronové sítě, VŠB – TU Ostrava, ISBN 80-7078-949-
2, 1995
- [6] Rogers, J.: Object-Oriented Neural Networks in C++. Academic press, inc., ISBN: 0-12-
593115-8, 1997
- [7] MATLAB®, The Language of Technical Computing, Version 6, The Math Works, Inc.,
2000 Reference, Manuál k NN toolboxu pro Matlab v AJ